Zgodovina reševanja polinomskih enačb

Marjan Jerman

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

19. november 2010

Polinomska enačba

- *Polinomska enačba* je enačba oblike

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \; .$$

- Kaj sploh pomeni zgornji zapis?
- Kateri številski podmnožici pripadajo koeficienti a_i?
- Kako poteka osnovna aritmetika s temi števili?
- Ali je obstoj rešitev in ali so metode reševanja podobne za vse izbire številskih množic?

Polinomska enačba

- *Polinomska enačba* je enačba oblike

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \ .$$

- Kaj sploh pomeni zgornji zapis?
- Kateri številski podmnožici pripadajo koeficienti a_i?
- Kako poteka osnovna aritmetika s temi števili?
- Ali je obstoj rešitev in ali so metode reševanja podobne za vse izbire številskih množic?

Polinomska enačba

- *Polinomska enačba* je enačba oblike

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \, .$$

- Kaj sploh pomeni zgornji zapis?
- Kateri številski podmnožici pripadajo koeficienti a_i?
- Kako poteka osnovna aritmetika s temi števili?
- Ali je obstoj rešitev in ali so metode reševanja podobne za vse izbire številskih množic?

Polinomska enačba

- *Polinomska enačba* je enačba oblike

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \ .$$

- Kaj sploh pomeni zgornji zapis?
- Kateri številski podmnožici pripadajo koeficienti a_i?
- Kako poteka osnovna aritmetika s temi števili?
- Ali je obstoj rešitev in ali so metode reševanja podobne za vse izbire številskih množic?

Polinomska enačba

- *Polinomska enačba* je enačba oblike

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \, .$$

- Kaj sploh pomeni zgornji zapis?
- Kateri številski podmnožici pripadajo koeficienti a_i?
- Kako poteka osnovna aritmetika s temi števili?
- Ali je obstoj rešitev in ali so metode reševanja podobne za vse izbire številskih množic?

Egipt: Rhindov papirus, Britanski muzej

- 24. naloga: *Če neznani količini prištejemo njeno četrtino, dobimo* 15.
- $$x + \frac{x}{4} = 15$$
- Uporaba simboličnega zapisa šele od 15. stoletja
- *Metoda napačne predpostavke:* $x = 4 \Rightarrow x + \frac{x}{4} = 5$
  Ker je to trikrat premalo, je prava rešitev $x = 4 \cdot 3 = 12$.

Egipt: Rhindov papirus, Britanski muzej

- 24. naloga: *Če neznani količini prištejemo njeno četrtino, dobimo* 15*.*
- $$x + \frac{x}{4} = 15$$
- Uporaba simboličnega zapisa šele od 15. stoletja
- *Metoda napačne predpostavke:* $x = 4 \Rightarrow x + \frac{x}{4} = 5$
  Ker je to trikrat premalo, je prava rešitev $x = 4 \cdot 3 = 12$.

Egipt: Rhindov papirus, Britanski muzej

- 24. naloga: *Če neznani količini prištejemo njeno četrtino, dobimo* 15.
- $$x + \frac{x}{4} = 15$$
- Uporaba simboličnega zapisa šele od 15. stoletja
- *Metoda napačne predpostavke:* $x = 4 \Rightarrow x + \frac{x}{4} = 5$
  Ker je to trikrat premalo, je prava rešitev $x = 4 \cdot 3 = 12$.

Egipt: Rhindov papirus, Britanski muzej

- 24. naloga: *Če neznani količini prištejemo njeno četrtino, dobimo* 15.
- $$x + \frac{x}{4} = 15$$
- Uporaba simboličnega zapisa šele od 15. stoletja
- *Metoda napačne predpostavke:* $x = 4 \Rightarrow x + \frac{x}{4} = 5$
  Ker je to trikrat premalo, je prava rešitev $x = 4 \cdot 3 = 12$.

Egipt: Rhindov papirus, Britanski muzej

- 24. naloga: *Če neznani količini prištejemo njeno četrtino, dobimo* 15.
- $$x + \frac{x}{4} = 15$$
- Uporaba simboličnega zapisa šele od 15. stoletja
- *Metoda napačne predpostavke:* $x = 4 \Rightarrow x + \frac{x}{4} = 5$

  Ker je to trikrat premalo, je prava rešitev $x = 4 \cdot 3 = 12$.

Egipt: Rhindov papirus, Britanski muzej

- 24. naloga: *Če neznani količini prištejemo njeno četrtino, dobimo* 15.
- $$x + \frac{x}{4} = 15$$
- Uporaba simboličnega zapisa šele od 15. stoletja
- *Metoda napačne predpostavke:* $x = 4 \Rightarrow x + \frac{x}{4} = 5$
  Ker je to trikrat premalo, je prava rešitev $x = 4 \cdot 3 = 12$.

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da* 4 *kur/bur pšenice, drugo pa* 3 *kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za* 500 *sil. Skupna površina polj je* 1800 *sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\dfrac{x+y}{2} = 900$, $z = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z,\ y = 900 - z$
- $\dfrac{2}{3}900 - \dfrac{1}{2}900 + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da 4 kur/bur pšenice, drugo pa 3 kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za 500 sil. Skupna površina polj je 1800 sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\dfrac{x+y}{2} = 900$, $z = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z,\ y = 900 - z$
- $\dfrac{2}{3}900 - \dfrac{1}{2}900 + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da* 4 *kur/bur pšenice, drugo pa* 3 *kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za* 500 *sil. Skupna površina polj je* 1800 *sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\dfrac{x+y}{2} = 900,\ z = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z,\ y = 900 - z$
- $\dfrac{2}{3}900 - \dfrac{1}{2}900 + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da* 4 *kur/bur pšenice, drugo pa* 3 *kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za* 500 *sil. Skupna površina polj je* 1800 *sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\dfrac{x+y}{2} = 900,\ z = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z,\ y = 900 - z$
- $\dfrac{2}{3}900 - \dfrac{1}{2}900 + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da* 4 *kur/bur pšenice, drugo pa* 3 *kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za* 500 *sil. Skupna površina polj je* 1800 *sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\dfrac{x+y}{2} = 900$, $z = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z,\ y = 900 - z$
- $\frac{2}{3}900 - \frac{1}{2}900 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da 4 kur/bur pšenice, drugo pa 3 kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za 500 sil. Skupna površina polj je 1800 sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\dfrac{x+y}{2} = 900$, $z = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z,\ y = 900 - z$
- $\frac{2}{3}900 - \frac{1}{2}900 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da* 4 *kur/bur pšenice, drugo pa* 3 *kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za* 500 *sil. Skupna površina polj je* 1800 *sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\dfrac{x+y}{2} = 900$, $z = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z,\ y = 900 - z$
- $\dfrac{2}{3}900 - \dfrac{1}{2}900 + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Babilon: Tablica 8389, Berlin

- 1. naloga: *Prvo polje da 4 kur/bur pšenice, drugo pa 3 kur/bur. Prvi pridelek presega drugi za 500 sil. Skupna površina polj je 1800 sar. Koliko pridelka je na vsakem od polj?*
- bur=1800 sar, 1 sar=36 m^2, kur=300 sil, 1 sila=1 liter
- $x + y = 1800$, $\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = 500$
- $\dfrac{x+y}{2} = 900$, $z = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = 900 + z,\ y = 900 - z$
- $\dfrac{2}{3}900 - \dfrac{1}{2}900 + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{1}{2}z = 500 \Rightarrow z = 300$

Arhimedova sončna čreda

- Živina je sestavljena iz 4 čred bikov in krav, kjer ima x_1 bikov in y_1 krav belo dlako, x_2 in y_2 črno, x_3 in y_3 lise, x_4 in y_4 pa rjavo dlako.
- (a) Sedem linearnih povezav: $x_1 = \frac{5}{6}x_2 + x_4$, $x_2 = \frac{9}{20}x_3 + x_4$, $x_3 = \frac{13}{42}x_1 + x_4$, $y_1 = \frac{7}{12}(x_2 + y_2)$, $y_2 = \frac{9}{20}(x_3 + y_3)$, $y_3 = \frac{11}{30}(x_4 + y_4)$, $y_4 = \frac{13}{42}(x_1 + y_1)$.
- (b) Črne in bele bike lahko postavimo tako, da tvorijo kvadrat, rjave in lisaste bike pa tako, da tvorijo trikotnik.

Arhimedova sončna čreda

- Živina je sestavljena iz 4 čred bikov in krav, kjer ima x_1 bikov in y_1 krav belo dlako, x_2 in y_2 črno, x_3 in y_3 lise, x_4 in y_4 pa rjavo dlako.
- (a) Sedem linearnih povezav: $x_1 = \frac{5}{6}x_2 + x_4$, $x_2 = \frac{9}{20}x_3 + x_4$, $x_3 = \frac{13}{42}x_1 + x_4$, $y_1 = \frac{7}{12}(x_2 + y_2)$, $y_2 = \frac{9}{20}(x_3 + y_3)$, $y_3 = \frac{11}{30}(x_4 + y_4)$, $y_4 = \frac{13}{42}(x_1 + y_1)$.
- (b) Črne in bele bike lahko postavimo tako, da tvorijo kvadrat, rjave in lisaste bike pa tako, da tvorijo trikotnik.

Arhimedova sončna čreda

- Živina je sestavljena iz 4 čred bikov in krav, kjer ima x_1 bikov in y_1 krav belo dlako, x_2 in y_2 črno, x_3 in y_3 lise, x_4 in y_4 pa rjavo dlako.
- (a) Sedem linearnih povezav: $x_1 = \frac{5}{6}x_2 + x_4$, $x_2 = \frac{9}{20}x_3 + x_4$, $x_3 = \frac{13}{42}x_1 + x_4$, $y_1 = \frac{7}{12}(x_2 + y_2)$, $y_2 = \frac{9}{20}(x_3 + y_3)$, $y_3 = \frac{11}{30}(x_4 + y_4)$, $y_4 = \frac{13}{42}(x_1 + y_1)$.
- (b) Črne in bele bike lahko postavimo tako, da tvorijo kvadrat, rjave in lisaste bike pa tako, da tvorijo trikotnik.

Arhimedova sončna čreda

- Živina je sestavljena iz 4 čred bikov in krav, kjer ima x_1 bikov in y_1 krav belo dlako, x_2 in y_2 črno, x_3 in y_3 lise, x_4 in y_4 pa rjavo dlako.
- (a) Sedem linearnih povezav: $x_1 = \frac{5}{6}x_2 + x_4$, $x_2 = \frac{9}{20}x_3 + x_4$, $x_3 = \frac{13}{42}x_1 + x_4$, $y_1 = \frac{7}{12}(x_2 + y_2)$, $y_2 = \frac{9}{20}(x_3 + y_3)$, $y_3 = \frac{11}{30}(x_4 + y_4)$, $y_4 = \frac{13}{42}(x_1 + y_1)$.
- (b) Črne in bele bike lahko postavimo tako, da tvorijo kvadrat, rjave in lisaste bike pa tako, da tvorijo trikotnik.

Rešitev

- $x_1 = 10366482k$, $x_2 = 7460514k$, $x_3 = 7358060k$, $x_4 = 4149387k$
- $y_1 = 7206360k$, $y_2 = 4893246k$, $y_3 = 3515820k$, $y_4 = 5439213k$
- $x_1 + x_2 = 17826996k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657k$
- $k = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot m^2$
- $x_3 + x_4 = 51285802909803m^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Rešitev ima 206549 cifer.

Rešitev

- $x_1 = 10366482k$, $x_2 = 7460514k$, $x_3 = 7358060k$, $x_4 = 4149387k$
- $y_1 = 7206360k$, $y_2 = 4893246k$, $y_3 = 3515820k$, $y_4 = 5439213k$
- $x_1 + x_2 = 17826996k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657k$
- $k = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot m^2$
- $x_3 + x_4 = 51285802909803m^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Rešitev ima 206549 cifer.

Rešitev

- $x_1 = 10366482k$, $x_2 = 7460514k$, $x_3 = 7358060k$, $x_4 = 4149387k$
- $y_1 = 7206360k$, $y_2 = 4893246k$, $y_3 = 3515820k$, $y_4 = 5439213k$
- $x_1 + x_2 = 17826996k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657k$
- $k = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot m^2$
- $x_3 + x_4 = 51285802909803m^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Rešitev ima 206549 cifer.

Rešitev

- $x_1 = 10366482k$, $x_2 = 7460514k$, $x_3 = 7358060k$, $x_4 = 4149387k$
- $y_1 = 7206360k$, $y_2 = 4893246k$, $y_3 = 3515820k$, $y_4 = 5439213k$
- $x_1 + x_2 = 17826996k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657k$
- $k = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot m^2$
- $x_3 + x_4 = 51285802909803m^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Rešitev ima 206549 cifer.

Rešitev

- $x_1 = 10366482k$, $x_2 = 7460514k$, $x_3 = 7358060k$, $x_4 = 4149387k$
- $y_1 = 7206360k$, $y_2 = 4893246k$, $y_3 = 3515820k$, $y_4 = 5439213k$
- $x_1 + x_2 = 17826996k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657k$
- $k = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot m^2$
- $x_3 + x_4 = 51285802909803m^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Rešitev ima 206549 cifer.

Rešitev

- $x_1 = 10366482k$, $x_2 = 7460514k$, $x_3 = 7358060k$, $x_4 = 4149387k$
- $y_1 = 7206360k$, $y_2 = 4893246k$, $y_3 = 3515820k$, $y_4 = 5439213k$
- $x_1 + x_2 = 17826996k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657k$
- $k = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot m^2$
- $x_3 + x_4 = 51285802909803m^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Rešitev ima 206549 cifer.

Babilon: Tablica 13901, Britanski muzej

- *Če seštejeŝ ploščino in stranico kvadrata, dobiš* $\frac{3}{4}$.
- $x^2 + x = \frac{3}{4}$
- $1 \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot} \frac{1}{2} \xrightarrow{\cdot^2} \frac{1}{4} \xrightarrow{+\frac{3}{4}} 1 \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} 1 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$
- $x^2 + px = q$ ima rešitev $x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Babilon: Tablica 13901, Britanski muzej

- *Če seštejeŝ ploščino in stranico kvadrata, dobiš* $\frac{3}{4}$.
- $x^2 + x = \frac{3}{4}$
- $1 \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot} \frac{1}{2} \xrightarrow{\cdot^2} \frac{1}{4} \xrightarrow{+\frac{3}{4}} 1 \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} 1 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$
- $x^2 + px = q$ ima rešitev $x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Babilon: Tablica 13901, Britanski muzej

- *Če seštejeÅ¡ ploščino in stranico kvadrata, dobiš* $\frac{3}{4}$.
- $x^2 + x = \frac{3}{4}$
- $1 \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot} \frac{1}{2} \xrightarrow{\cdot^2} \frac{1}{4} \xrightarrow{+\frac{3}{4}} 1 \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} 1 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$
- $x^2 + px = q$ ima rešitev $x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Babilon: Tablica 13901, Britanski muzej

- *Če seštevaš ploščino in stranico kvadrata, dobiš* $\frac{3}{4}$.
- $x^2 + x = \frac{3}{4}$
- $1 \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot} \frac{1}{2} \xrightarrow{\cdot^2} \frac{1}{4} \xrightarrow{+\frac{3}{4}} 1 \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} 1 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$
- $x^2 + px = q$ ima rešitev $x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Grški papirus 29, Ženeva

- *Vsota katete in hipotenuze je 8, druga kateta je dolga 4. Poišči stranice.*
- $a + c = 8$, $b = 4$
- $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) \Rightarrow c - a = \dfrac{b^2}{a + c}$
- $c = \frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2}$

Grški papirus 29, Ženeva

- *Vsota katete in hipotenuze je 8, druga kateta je dolga 4. Poišči stranice.*
- $a + c = 8$, $b = 4$
- $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) \Rightarrow c - a = \dfrac{b^2}{a + c}$
- $c = \frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2}$

Grški papirus 29, Ženeva

- *Vsota katete in hipotenuze je 8, druga kateta je dolga 4. Poišči stranice.*
- $a + c = 8$, $b = 4$
- $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) \Rightarrow c - a = \dfrac{b^2}{a + c}$
- $c = \frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2}$

Grški papirus 29, Ženeva

- *Vsota katete in hipotenuze je 8, druga kateta je dolga 4. Poišči stranice.*
- $a + c = 8$, $b = 4$
- $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) \Rightarrow c - a = \dfrac{b^2}{a + c}$
- $c = \frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2}$

Islam: Al-Khwarizmi

- Tekst se prevede na sistem enačb:

$$u + v = 10, \quad \frac{u}{v} + \frac{v}{u} = 2 + \frac{1}{6}.$$

- To nam da po preoblikovanju (al-jabr=obnovitev, al-ikmal=dopolnitev) enačbo:

$$v^2 + 24 = 10v$$

- Rešimo jo lahko s pomočjo geometrijske interpretacije.

Islam: Al-Khwarizmi

- Tekst se prevede na sistem enačb:

$$u + v = 10, \quad \frac{u}{v} + \frac{v}{u} = 2 + \tfrac{1}{6}.$$

- To nam da po preoblikovanju (al-jabr=obnovitev, al-ikmal=dopolnitev) enačbo:

$$v^2 + 24 = 10v$$

- Rešimo jo lahko s pomočjo geometrijske interpretacije.

Islam: Al-Khwarizmi

- Tekst se prevede na sistem enačb:

$$u + v = 10, \quad \frac{u}{v} + \frac{v}{u} = 2 + \tfrac{1}{6}.$$

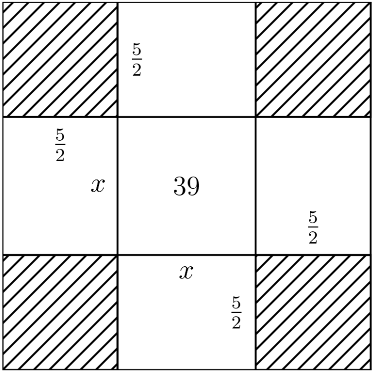
- To nam da po preoblikovanju (al-jabr=obnovitev, al-ikmal=dopolnitev) enačbo:

$$v^2 + 24 = 10v$$

- Rešimo jo lahko s pomočjo geometrijske interpretacije.

Reševanje kvadratne enačbe

$$x^2 + 10x = 39$$



Zakaj kubična enačba?

- Babilon: izkopavanje kleti
- Mitska naloga iz Delosa: (volumsko) podvojiti Apolonov oltar (v obliki kocke)
- Arhimed: Kje z ravnino prerezati kroglo tako, da bosta nastala volumna v razmerju 1 : 2? $v^3 - 3rv^2 + \frac{4}{3}r^3 = 0$
- Konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika: $a^3 - ra^2 - 2r^2a + r^3 = 0.$

Zakaj kubična enačba?

- Babilon: izkopavanje kleti
- Mitska naloga iz Delosa: (volumsko) podvojiti Apolonov oltar (v obliki kocke)
- Arhimed: Kje z ravnino prerezati kroglo tako, da bosta nastala volumna v razmerju $1 : 2$? $v^3 - 3rv^2 + \frac{4}{3}r^3 = 0$
- Konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika: $a^3 - ra^2 - 2r^2a + r^3 = 0.$

Zakaj kubična enačba?

- Babilon: izkopavanje kleti
- Mitska naloga iz Delosa: (volumsko) podvojiti Apolonov oltar (v obliki kocke)
- Arhimed: Kje z ravnino prerezati kroglo tako, da bosta nastala volumna v razmerju 1 : 2? $v^3 - 3rv^2 + \frac{4}{3}r^3 = 0$
- Konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika: $a^3 - ra^2 - 2r^2a + r^3 = 0.$

Zakaj kubična enačba?

- Babilon: izkopavanje kleti
- Mitska naloga iz Delosa: (volumsko) podvojiti Apolonov oltar (v obliki kocke)
- Arhimed: Kje z ravnino prerezati kroglo tako, da bosta nastala volumna v razmerju 1 : 2? $v^3 - 3rv^2 + \frac{4}{3}r^3 = 0$
- Konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika: $a^3 - ra^2 - 2r^2a + r^3 = 0$.

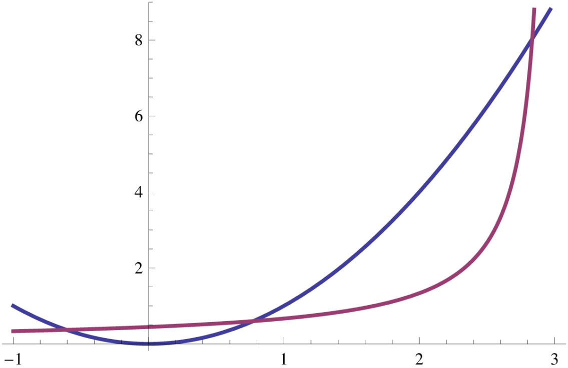
Zakaj kubična enačba?

- Babilon: izkopavanje kleti
- Mitska naloga iz Delosa: (volumsko) podvojiti Apolonov oltar (v obliki kocke)
- Arhimed: Kje z ravnino prerezati kroglo tako, da bosta nastala volumna v razmerju 1 : 2? $v^3 - 3rv^2 + \frac{4}{3}r^3 = 0$
- Konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika: $a^3 - ra^2 - 2r^2a + r^3 = 0$.

Metode reševanja kubične enačbe

- Umar Khayyam: 14 tipov kubičnih enačb
- Rešitev Arhimedove kubične enačbe je presek stožnic:

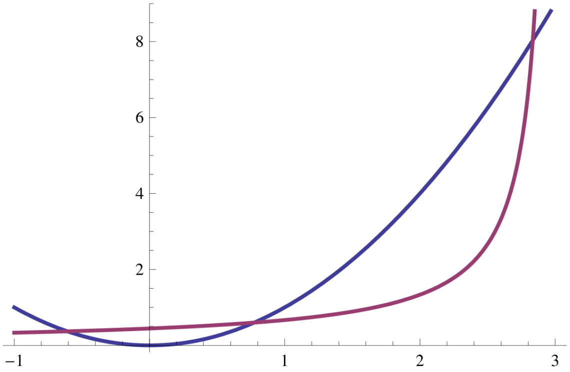
$$y = x^2, \quad (x - 3r)y = -\frac{4}{3}r^3.$$



Metode reševanja kubične enačbe

- Umar Khayyam: 14 tipov kubičnih enačb
- Rešitev Arhimedove kubične enačbe je presek stožnic:

$$y = x^2, \quad (x - 3r)y = -\frac{4}{3}r^3.$$



Renesančna rešitev

- $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
- Scipione dal Ferro znal rešiti enačbo $x^3 + px + q = 0$.Vsako kubično enačbo v to obliko prevede substitucija $y = x + \frac{1}{3}a$.
- Nicolo Tartaglia reši splošno enačbo. Girolamo Cardano ga s trikom prepriča, da mu izda skrivnost in jo objavi v delu *Ars Magna*.
- Enakost $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ lahko prepišemo v obliko
$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0.$$

Renesančna rešitev

- $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
- Scipione dal Ferro znal rešiti enačbo $x^3 + px + q = 0$. Vsako kubično enačbo v to obliko prevede substitucija $y = x + \frac{1}{3}a$.
- Nicolo Tartaglia reši splošno enačbo. Girolamo Cardano ga s trikom prepriča, da mu izda skrivnost in jo objavi v delu *Ars Magna*.
- Enakost $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ lahko prepišemo v obliko

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0.$$

Renesančna rešitev

- $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
- Scipione dal Ferro znal rešiti enačbo $x^3 + px + q = 0$.Vsako kubično enačbo v to obliko prevede substitucija $y = x + \frac{1}{3}a$.
- Nicolo Tartaglia reši splošno enačbo. Girolamo Cardano ga s trikom prepriča, da mu izda skrivnost in jo objavi v delu *Ars Magna*.
- Enakost $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ lahko prepišemo v obliko

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0.$$

Renesančna rešitev

- $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
- Scipione dal Ferro znal rešiti enačbo $x^3 + px + q = 0$.Vsako kubično enačbo v to obliko prevede substitucija $y = x + \frac{1}{3}a$.
- Nicolo Tartaglia reši splošno enačbo. Girolamo Cardano ga s trikom prepriča, da mu izda skrivnost in jo objavi v delu *Ars Magna*.
- Enakost $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ lahko prepišemo v obliko

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0.$$

Renesančna rešitev

- $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
- Scipione dal Ferro znal rešiti enačbo $x^3 + px + q = 0$.Vsako kubično enačbo v to obliko prevede substitucija $y = x + \frac{1}{3}a$.
- Nicolo Tartaglia reši splošno enačbo. Girolamo Cardano ga s trikom prepriča, da mu izda skrivnost in jo objavi v delu *Ars Magna*.
- Enakost $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ lahko prepišemo v obliko

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0.$$

Renesančna rešitev

- $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
- Scipione dal Ferro znal rešiti enačbo $x^3 + px + q = 0$.Vsako kubično enačbo v to obliko prevede substitucija $y = x + \frac{1}{3}a$.
- Nicolo Tartaglia reši splošno enačbo. Girolamo Cardano ga s trikom prepriča, da mu izda skrivnost in jo objavi v delu *Ars Magna*.
- Enakost $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ lahko prepišemo v obliko
$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0.$$

- $x = u + v$, $p = -3uv$, $q = -(u^3 + v^3)$
- $(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3$
- $u^3 + v^3 = -q$, $u^3 - v^3 = \pm\sqrt{q^3 + 4(\frac{p}{3})^3}$
- $u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$, $v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$
- $p = -3uv$

- $x = u + v$, $p = -3uv$, $q = -(u^3 + v^3)$
- $(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3$
- $u^3 + v^3 = -q$, $u^3 - v^3 = \pm\sqrt{q^3 + 4(\frac{p}{3})^3}$
- $u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$, $v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$
- $p = -3uv$

- $x = u + v$, $p = -3uv$, $q = -(u^3 + v^3)$
- $(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3$
- $u^3 + v^3 = -q$, $u^3 - v^3 = \pm\sqrt{q^3 + 4(\frac{p}{3})^3}$
- $u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$, $v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$
- $p = -3uv$

- $x = u + v$, $p = -3uv$, $q = -(u^3 + v^3)$
- $(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3$
- $u^3 + v^3 = -q$, $u^3 - v^3 = \pm\sqrt{q^3 + 4(\frac{p}{3})^3}$
- $u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$, $v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$
- $p = -3uv$

- $x = u + v$, $p = -3uv$, $q = -(u^3 + v^3)$
- $(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3$
- $u^3 + v^3 = -q$, $u^3 - v^3 = \pm\sqrt{q^3 + 4(\frac{p}{3})^3}$
- $u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$, $v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^2}$
- $p = -3uv$

- Enačba $x^3 = 15x + 4$
- $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
- To se zgodi, ko so koreni različni in realni.
- Rafael Bombelli: $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm t\sqrt{-1} \Rightarrow t = 1$
- $\sqrt{-x}\sqrt{-x} = -x$

- Enačba $x^3 = 15x + 4$
- $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
- To se zgodi, ko so koreni različni in realni.
- Rafael Bombelli: $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm t\sqrt{-1} \Rightarrow t = 1$
- $\sqrt{-x}\sqrt{-x} = -x$

- Enačba $x^3 = 15x + 4$
- $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
- To se zgodi, ko so koreni različni in realni.
- Rafael Bombelli: $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm t\sqrt{-1} \Rightarrow t = 1$
- $\sqrt{-x}\sqrt{-x} = -x$

- Enačba $x^3 = 15x + 4$
- $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
- To se zgodi, ko so koreni različni in realni.
- Rafael Bombelli: $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm t\sqrt{-1} \Rightarrow t = 1$
- $\sqrt{-x}\sqrt{-x} = -x$

- Enačba $x^3 = 15x + 4$
- $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
- To se zgodi, ko so koreni različni in realni.
- Rafael Bombelli: $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm t\sqrt{-1} \Rightarrow t = 1$
- $\sqrt{-x}\sqrt{-x} = -x$

- Enačba $x^3 = 15x + 4$
- $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
- To se zgodi, ko so koreni različni in realni.
- Rafael Bombelli: $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm t\sqrt{-1} \Rightarrow t = 1$
- $\sqrt{-x}\sqrt{-x} = -x$

Lodovico Ferrari

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ \frac{x_1}{x_2} &= \frac{x_2}{x_3} \\ x_1 x_2 &= 6 \end{aligned}$$

se prevede na

$$x_2^4 + 6x_2^2 + 36 = 60x_2.$$

Lodovico Ferrari

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ \frac{x_1}{x_2} &= \frac{x_2}{x_3} \\ x_1 x_2 &= 6 \end{aligned}$$

se prevede na

$$x_2^4 + 6x_2^2 + 36 = 60x_2.$$

Rešitev

- $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b)x^2 - cx - d$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax + y)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)x^2 - (c - ay)x - d + y^2$
- $(c - ay)^2 - 4(\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)(y^2 - d) = 0$
- $x^2 + \frac{1}{2}ax + y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b + 2y} \cdot (x - y)$

Rešitev

- $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b)x^2 - cx - d$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax + y)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)x^2 - (c - ay)x - d + y^2$
- $(c - ay)^2 - 4(\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)(y^2 - d) = 0$
- $x^2 + \frac{1}{2}ax + y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b + 2y} \cdot (x - y)$

Rešitev

- $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b)x^2 - cx - d$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax + y)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)x^2 - (c - ay)x - d + y^2$
- $(c - ay)^2 - 4(\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)(y^2 - d) = 0$
- $x^2 + \frac{1}{2}ax + y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b + 2y} \cdot (x - y)$

Rešitev

- $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b)x^2 - cx - d$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax + y)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)x^2 - (c - ay)x - d + y^2$
- $(c - ay)^2 - 4(\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)(y^2 - d) = 0$
- $x^2 + \frac{1}{2}ax + y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b + 2y} \cdot (x - y)$

Rešitev

- $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b)x^2 - cx - d$
- $(x^2 + \frac{1}{2}ax + y)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)x^2 - (c - ay)x - d + y^2$
- $(c - ay)^2 - 4(\frac{1}{4}a^2 - b + 2y)(y^2 - d) = 0$
- $x^2 + \frac{1}{2}ax + y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b + 2y} \cdot (x - y)$

Enačbe višjih stopenj

- Tschirnhaus, Euler, Bézout, Vandermonde, Waring, Lagrange so se skušali enačbo spraviti v obliko $x^n = a$. V splošnem je za primerno polinomsko substitucijo treba rešiti polinomsko enačbo stopnje $(n-1)!$.
- Paolo Ruffini: dokaz z izjemnimi idejami in manjšo luknjo
- Niels Henrik Abel: pravilen dokaz
- Evariste Galois: Katere polinomske enačbe pa se da rešiti z radikali?

Enačbe višjih stopenj

- Tschirnhaus, Euler, Bézout, Vandermonde, Waring, Lagrange so se skušali enačbo spraviti v obliko $x^n = a$. V splošnem je za primerno polinomsko substitucijo treba rešiti polinomsko enačbo stopnje $(n-1)!$.
- Paolo Ruffini: dokaz z izjemnimi idejami in manjšo luknjo
- Niels Henrik Abel: pravilen dokaz
- Evariste Galois: Katere polinomske enačbe pa se da rešiti z radikali?

Enačbe višjih stopenj

- Tschirnhaus, Euler, Bézout, Vandermonde, Waring, Lagrange so se skušali enačbo spraviti v obliko $x^n = a$. V splošnem je za primerno polinomsko substitucijo treba rešiti polinomsko enačbo stopnje $(n-1)!$.
- Paolo Ruffini: dokaz z izjemnimi idejami in manjšo luknjo
- Niels Henrik Abel: pravilen dokaz
- Evariste Galois: Katere polinomske enačbe pa se da rešiti z radikali?

Enačbe višjih stopenj

- Tschirnhaus, Euler, Bézout, Vandermonde, Waring, Lagrange so se skušali enačbo spraviti v obliko $x^n = a$. V splošnem je za primerno polinomsko substitucijo treba rešiti polinomsko enačbo stopnje $(n-1)!$.
- Paolo Ruffini: dokaz z izjemnimi idejami in manjšo luknjo
- Niels Henrik Abel: pravilen dokaz
- Evariste Galois: Katere polinomske enačbe pa se da rešiti z radikali?

Enačbe višjih stopenj

- Tschirnhaus, Euler, Bézout, Vandermonde, Waring, Lagrange so se skušali enačbo spraviti v obliko $x^n = a$. V splošnem je za primerno polinomsko substitucijo treba rešiti polinomsko enačbo stopnje $(n-1)!$.
- Paolo Ruffini: dokaz z izjemnimi idejami in manjšo luknjo
- Niels Henrik Abel: pravilen dokaz
- Evariste Galois: Katere polinomske enačbe pa se da rešiti z radikali?