Zgodba s srečnim koncem

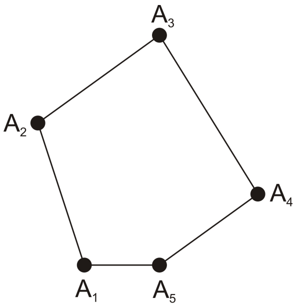
István Kovács

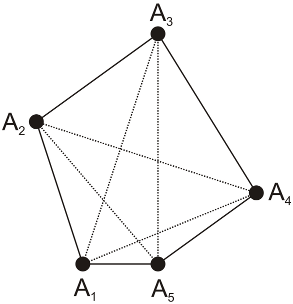
FAMNIT, Univeza na Primorskem

18 februar 2011

Osnovne definicije

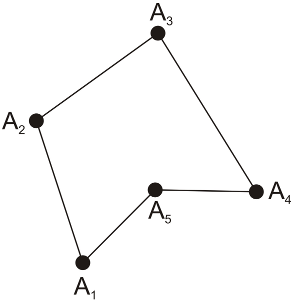
Naj bo P petkontnik v ravnini, $P = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$.

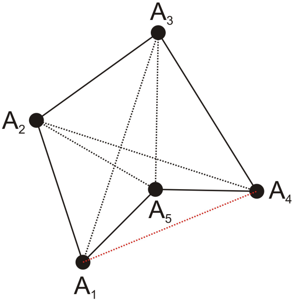




V tem primeru P je **koveksni**, ker je vsaka diagonala v notaranjosti poligona.

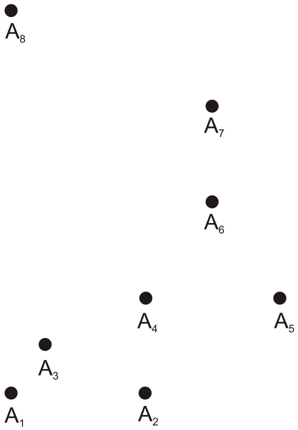
Naj bo Q petkontnik v ravnini, $Q = A_1A_2A_3A_4A_5$.

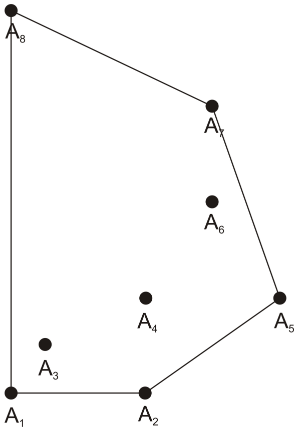




Zdaj diagonala A_1A_4 ne leži v notranjosti poligona, zato ni Q konveksni. Pravimo tudi, da je Q **konkavni**.

Naj bo X množica točk $A_1, A_2, \ldots, A_8$ v poljubnem položaju.





Obstaja koveksni poligon, ki ga tvorijo nekatere točke v X, in velja, da vsaka ostala točka v X pada v notranjosti poligona.

V splošnem velja naslednja lastnost.

Trditev. Vsaka množica X končnega števila točk v ravnini vsebuje nekatere točke $A_1, \ldots, A_m$ tako, da velja

1. $P = A_1 \ldots A_m$ je konveksni poligon.
2. Vsaka točka $A \in X, A \notin \{A_1, \ldots, A_m\}$ je v notranjosti poligona P.

V splošnem velja naslednja lastnost.

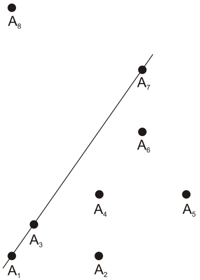
Trditev. Vsaka množica X končnega števila točk v ravnini vsebuje nekatere točke $A_1, \ldots, A_m$ tako, da velja

1. $P = A_1 \ldots A_m$ je konveksni poligon.
2. Vsaka točka $A \in X, A \notin \{A_1, \ldots, A_m\}$ je v notranjosti poligona P.

Poligon P v trditvi je enolično določeni za X. Ta poligon P se imenuje kot **konveksna lupina** množice X.

V nadaljevanju nam zanima samo taka množica točk v ravnini, ki ima lastnost, da nikoli ne ležijo tri točke na isti premici. V tem primeru pravimo, da so točke v **splošnem položaju**.

V nadaljevanju nam zanima samo taka množica točk v ravnini, ki ima lastnost, da nikoli ne ležijo tri točke na isti premici. V tem primeru pravimo, da so točke v **splošnem položaju**.



Na primer, točke prejšnje množice X **niso** v splošnem položaju.

Happy ending - 1 del

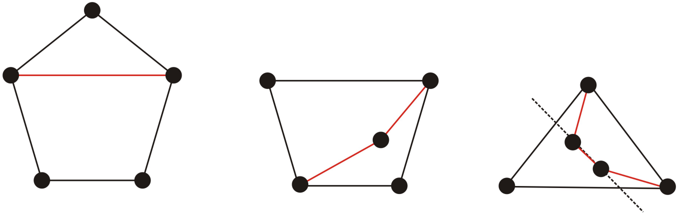
Naša zgodba se je začela leta 1933 z naslednjo preprosto nalogo.

Naloga. Dokažite, da vsaka množica petih točk v splošnem položaju uvsebuje štiri točk, ki tvorijo konveksni štirikotnik.

Happy ending - 1 del

Naša zgodba se je začela leta 1933 z naslednjo preprosto nalogo.

Naloga. Dokažite, da vsaka množica petih točk v splošnem položaju uvsebuje štiri točk, ki tvorijo konveksni štirikotnik.



Rešitev

Leta 1933 Eszter Klein je pospošila prejšnjo nalogo takole.

Problem Eszter Klein. Naj bo n pozitivno celo število. Ali obstaja torej število m tako, da velja, da vsaka množica m točk v splošnem položaju uvsebuje n točk, ki tvorijo konveksni n-kotnik.

Leta 1933 Eszter Klein je pospošila prejšnjo nalogo takole.

Problem Eszter Klein. Naj bo n pozitivno celo število. Ali obstaja torej število m tako, da velja, da vsaka množica m točk v splošnem položaju uvsebuje n točk, ki tvorijo konveksni n-kotnik.

Na primer, naj bo $n = 4$ v zgornjem problemu. Torej vprašujemo, če velja, da vsak m točk v splošnem položaju uvsebujejo konveksni štirikotnik za neko ustrezno število m.

Leta 1933 Eszter Klein je pospošila prejšnjo nalogo takole.

Problem Eszter Klein. Naj bo n pozitivno celo število. Ali obstaja torej število m tako, da velja, da vsaka množica m točk v splošnem položaju uvsebuje n točk, ki tvorijo konveksni n-kotnik.

Na primer, naj bo $n = 4$ v zgornjem problemu. Torej vprašujemo, če velja, da vsak m točk v splošnem položaju uvsebujejo konveksni štirikotnik za neko ustrezno število m.

SEVEDA!!! Naša preprosta naloga pravi, da je 5 en ustrezen izbir za m.

Skupina Anonymus (v letih 1920 - 1940)

Pál Erdős	Tibor Gallai	Géza Grünwald
Eszter Klein	Dezső Lázár	György Szekeres
György Svéd	Pál Turán	Márta Wachsberger

Kip Anonymusa v Budimpešti

Revija za Matematiko in Fiziko za Srednješolce (1894 -)

Revija za Matematiko in Fiziko za Srednješolce (1894 -)

Pál Erdős

Eszter Klein

György Szekeres

Erdős je poimenoval problem Kleinova happy ending problem, ker ta je vodil do poroke med Szekeresem in Kleinovo. Poroka je bila leta 1937.

Eszter Klein in György Szekeres kot mladoporočenca

Happy ending - 2 del

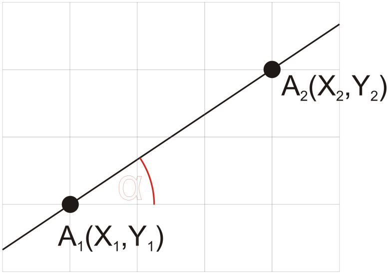
Naj bo A_1 in A_2 dve točki, ki sta dani s kordinatami $A_1 = (x_1, y_1)$ in $A_2 = (x_2, y_2)$ tako, da je $x_1 \neq x_2$.

Happy ending - 2 del

Naj bo A_1 in A_2 dve točki, ki sta dani s kordinatami $A_1 = (x_1, y_1)$ in $A_2 = (x_2, y_2)$ tako, da je $x_1 \neq x_2$.

Premica ℓ skozi točki A_1 in A_2 je opisana z enačbo

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1.$$

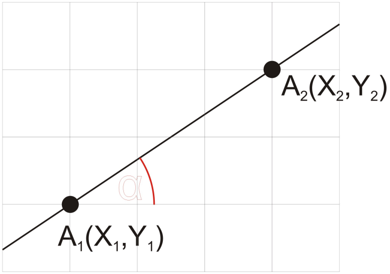


Happy ending - 2 del

Naj bo A_1 in A_2 dve točki, ki sta dani s kordinatami $A_1 = (x_1, y_1)$ in $A_2 = (x_2, y_2)$ tako, da je $x_1 \neq x_2$.

Premica ℓ skozi točki A_1 in A_2 je opisana z enačbo

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1.$$



Parameter $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan(\alpha)$ se imenuje **strmina** premice ℓ.

Naj bo X množia točk v splošnem položaju,

$$X = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

tako, da je $x_i \neq x_j$ za vsak par $i \neq j$.

Naj bo X množica točk v splošnem položaju,

$$X = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

tako, da je $x_i \neq x_j$ za vsak par $i \neq j$.

Zdaj se podmnožica $\{(x_{i_1}, y_{i_1}), (x_{i_2}, y_{i_2}), \ldots, (x_{i_k}, y_{i_k})\}$ imenuje **konveksni k-lok**, če velja $x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_k}$, in

$$\frac{y_{i_2} - y_{i_1}}{x_{i_2} - x_{i_1}} < \frac{y_{i_3} - y_{i_2}}{x_{i_3} - x_{i_2}} < \cdots < \frac{y_{i_k} - y_{i_{k-1}}}{x_{i_k} - x_{i_{k-1}}}.$$

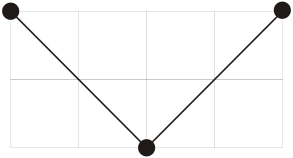
Naj bo X množica točk v splošnem položaju,

$$X = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

tako, da je $x_i \neq x_j$ za vsak par $i \neq j$.

Zdaj se podmnožica $\{(x_{i_1}, y_{i_1}), (x_{i_2}, y_{i_2}), \ldots, (x_{i_k}, y_{i_k})\}$ imenuje **konveksni k-lok**, če velja $x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_k}$, in

$$\frac{y_{i_2} - y_{i_1}}{x_{i_2} - x_{i_1}} < \frac{y_{i_3} - y_{i_2}}{x_{i_3} - x_{i_2}} < \cdots < \frac{y_{i_k} - y_{i_{k-1}}}{x_{i_k} - x_{i_{k-1}}}.$$



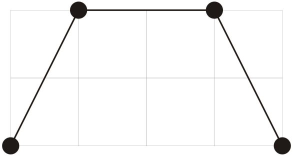
Konveksni 3-lok

Podmnožica $\{(x_{i_1}, y_{i_1}), (x_{i_2}, y_{i_2}), \ldots, (x_{i_k}, y_{i_k})\}$ pa se imenuje **konkavni k-lok**, če velja $x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_k}$, in

$$\frac{y_{i_2} - y_{i_1}}{x_{i_2} - x_{i_1}} > \frac{y_{i_3} - y_{i_2}}{x_{i_3} - x_{i_2}} > \cdots > \frac{y_{i_k} - y_{i_{k-1}}}{x_{i_k} - x_{i_{k-1}}}.$$

Podmnožica $\{(x_{i_1}, y_{i_1}), (x_{i_2}, y_{i_2}), \ldots, (x_{i_k}, y_{i_k})\}$ pa se imenuje **konkavni k-lok**, če velja $x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_k}$, in

$$\frac{y_{i_2} - y_{i_1}}{x_{i_2} - x_{i_1}} > \frac{y_{i_3} - y_{i_2}}{x_{i_3} - x_{i_2}} > \cdots > \frac{y_{i_k} - y_{i_{k-1}}}{x_{i_k} - x_{i_{k-1}}}.$$



konkavni 4-lok

Definicija. Za pozitivni celi števili k, l in $k, l \geq 3$, naj $\mathbf{f(k, l)}$ označi najmajnšo število n, za katero velja, da vsak n točk

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

v splošnem položaju in z paroma različnimi kordinatamai $x_1, \ldots, x_n$ vsebuje konveksni k-lok ali konkavni l-lok.

Definicija. Za pozitivni celi števili k, l in $k, l \geq 3$, naj $\mathbf{f(k,l)}$ označi najmajnšo število n, za katero velja, da vsak n točk

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

v splošnem položaju in z paroma različnimi kordinatamai $x_1, \ldots, x_n$ vsebuje konveksni k-lok ali konkavni l-lok.

Hitro se preričamo, da velja

$$f(k, 3) = f(3, k) = k.$$

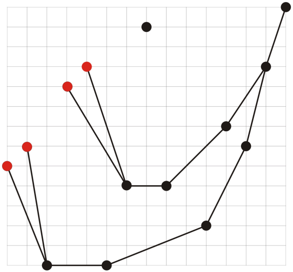
Lema. $f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1.$

Lema. $f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1$.

Dokaz. Predpostavimo, da je $|X| \geq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1$.

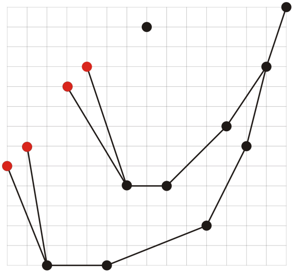
Lema. $f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1.$

Dokaz. Predpostavimo, da je $|X| \geq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1.$



Lema. $f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1.$

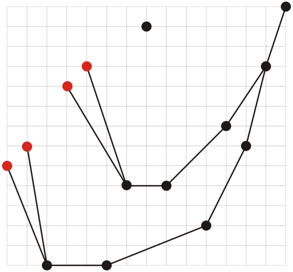
Dokaz. Predpostavimo, da je $|X| \geq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1.$



Naj bo Y množica vseh levah zadnjah točk konveksnih $(k-1)$-lokov (rdeče točke).

Lema. $f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1.$

Dokaz. Predpostavimo, da je $|X| \geq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1.$



Naj bo Y množica vseh levah zadnjah točk konveksnih $(k-1)$-lokov (rdeče točke).

Če je $|X \setminus Y| \geq f(k-1,l)$, potem $X \setminus Y$ usebuje konkavni l-lok.

Torej lahko predpostavimo, da je $|X| - |Y| \leq f(k-1, l) - 1$.

Torej lahko predpostavimo, da je $|X| - |Y| \leq f(k-1, l) - 1$.

Ker je

$$f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1 \leq |X|,$$

dobimo, da velja

$$|Y| \geq f(k, l-1).$$

Torej lahko predpostavimo, da je $|X| - |Y| \leq f(k-1, l) - 1$.

Ker je

$$f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1 \leq |X|,$$

dobimo, da velja

$$|Y| \geq f(k, l-1).$$

To pomeni, da Y vsebuje konveksni k-lok ali konkavni $(l-1)$-lok.

Torej lahko predpostavimo, da je $|X| - |Y| \leq f(k-1, l) - 1$.

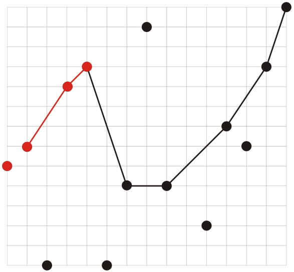
Ker je

$$f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1 \leq |X|,$$

dobimo, da velja

$$|Y| \geq f(k, l-1).$$

To pomeni, da Y vsebuje konveksni k-lok ali konkavni $(l-1)$-lok.



Torej lahko predpostavimo, da je $|X| - |Y| \leq f(k-1, l) - 1$.

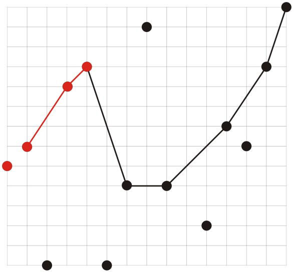
Ker je

$$f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1 \leq |X|,$$

dobimo, da velja

$$|Y| \geq f(k, l-1).$$

To pomeni, da Y vsebuje konveksni k-lok ali konkavni $(l-1)$-lok.



Na koncu, povezamo naši konkavni $(l-1)$-lok s ustreznim konveksnim $(k-1)$-lokom, in tak način dobimo en konkavni l-lok. QED

Za pozitivni celi števili m, n in $m \leq n$, **binomsko število** $\binom{n}{m}$ je definirano takole

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdots m}.$$

Za pozitivni celi števili m, n in $m \leq n$, **binomsko število** $\binom{n}{m}$ je definirano takole

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdots m}.$$

Binomiska števila zadoščajo identiteto.

Lema. Če sta $m, n \geq 2$, potem velja

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$$

Lema. $f(k,l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1.$

Lema. $f(k,l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1.$

Dokaz. Dokažemo po indukciji po $k+l$.

Lema. $f(k,l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.

Dokaz. Dokažemo po indukciji po $k + l$.

Če je $k = 3$, potem je $f(3,l) \leq \binom{l-1}{1} + 1 = l$.

Lema. $f(k,l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.

Dokaz. Dokažemo po indukciji po $k+l$.

Če je $k = 3$, potem je $f(3,l) \leq \binom{l-1}{1} + 1 = l$.

Če je $l = 3$, potem je $f(k,3) \leq \binom{k-1}{k-2} + 1 = k$.

Lema. $f(k,l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.

Dokaz. Dokažemo po indukciji po $k+l$.

Če je $k=3$, potem je $f(3,l) \leq \binom{l-1}{1} + 1 = l$.

Če je $l=3$, potem je $f(k,3) \leq \binom{k-1}{k-2} + 1 = k$.

Naj bosta $k>3$ in $l>3$.

$$f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1.$$

Lema. $f(k,l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.

Dokaz. Dokažemo po indukciji po $k+l$.

Če je $k=3$, potem je $f(3,l) \leq \binom{l-1}{1} + 1 = l$.

Če je $l=3$, potem je $f(k,3) \leq \binom{k-1}{k-2} + 1 = k$.

Naj bosta $k>3$ in $l>3$.

$$f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1.$$

$$f(k,l) \leq \binom{(k+l-4)-1}{(k-2)-1} + 1 + \binom{(k+l-4)-1}{k-2} + 1 - 1.$$

Lema. $f(k,l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.

Dokaz. Dokažemo po indukciji po $k+l$.

Če je $k = 3$, potem je $f(3,l) \leq \binom{l-1}{1} + 1 = l$.

Če je $l = 3$, potem je $f(k,3) \leq \binom{k-1}{k-2} + 1 = k$.

Naj bosta $k > 3$ in $l > 3$.

$$f(k,l) \leq f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1.$$

$$f(k,l) \leq \binom{(k+l-4)-1}{(k-2)-1} + 1 + \binom{(k+l-4)-1}{k-2} + 1 - 1.$$

$$f(k,l) \leq \binom{k+l-4}{k-2} + 1.$$

QED

Erdős-Szekeresev Izrek. Vsaka množica $\binom{2n-4}{n-2}+1$ točk v splošnem položaju uvsebuje n točk, ki tvorijo konveksni n-kotnik.

Erdős-Szekeresev Izrek. Vsaka množica $\binom{2n-4}{n-2}+1$ točk v splošnem položaju uvsebuje n točk, ki tvorijo konveksni n-kotnik.

Dokaz. Naj bo
$$|X| = \binom{2n-4}{n-2} + 1.$$

Erdős-Szekeresev Izrek. Vsaka množica $\binom{2n-4}{n-2}+1$ točk v splošnem položaju uvsebuje n točk, ki tvorijo konveksni n-kotnik.

Dokaz. Naj bo

$$|X| = \binom{2n-4}{n-2} + 1.$$

Ker je

$$f(n,n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1,$$

X vesbuje konveksni n-lok ali konkavni n-lok.

Erdős-Szekeresev Izrek. Vsaka množica $\binom{2n-4}{n-2}+1$ točk v splošnem položaju uvsebuje n točk, ki tvorijo konveksni n-kotnik.

Dokaz. Naj bo

$$|X| = \binom{2n-4}{n-2} + 1.$$

Ker je

$$f(n,n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1,$$

X vesbuje konveksni n-lok ali konkavni n-lok.

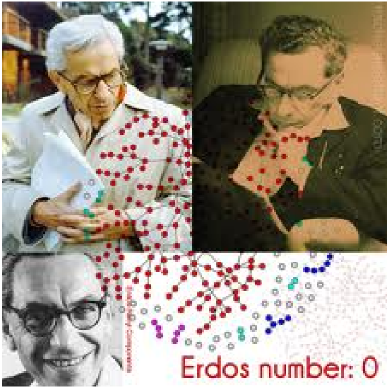
Oglišča obeh n-lokov pa tvorijo konveksni n-kotnik.

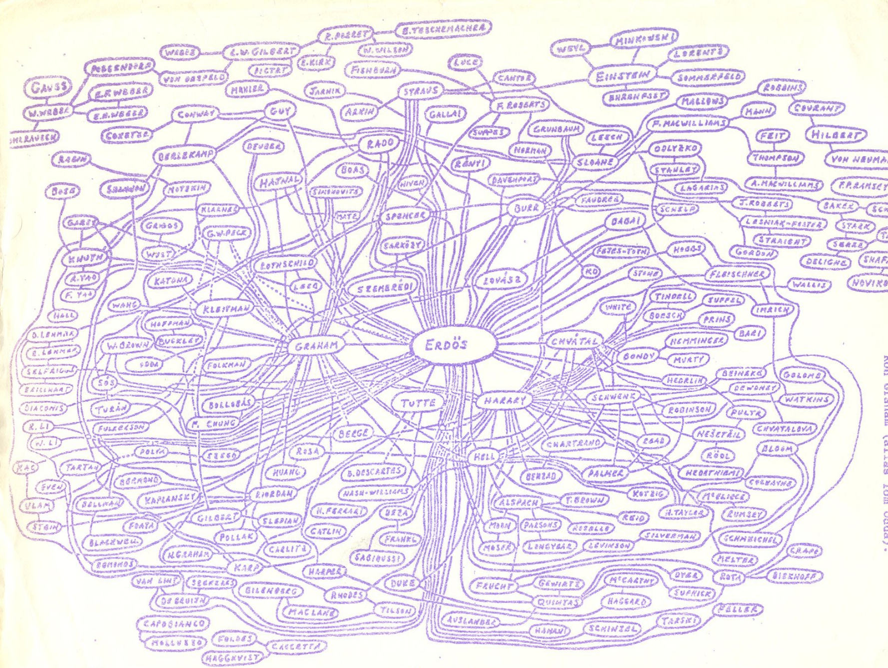
QED

• A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.* **2** (1935), 463 – 470.
• Paul Erdős: The Art of Counting. Selected Writings (J. Spencer, ed.), pp 3-12, MIT Press, Cambridge, MA, 1973.
• Classic Papers in Combinatorics (I Gessel and G.-C. Rota, eds.), pp 49-56, Birkhäuser, Basel, 1987.

• A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.* **2** (1935), 463 – 470.
• Paul Erdős: The Art of Counting. Selected Writings (J. Spencer, ed.), pp 3-12, MIT Press, Cambridge, MA, 1973.
• Classic Papers in Combinatorics (I Gessel and G.-C. Rota, eds.), pp 49-56, Birkhäuser, Basel, 1987.

. Pál Erdős György Szekeres


Erdos number: 0



ERDÖS
GRAHAM
TUTTE
HARARY
CHVÁTAL
HELL
GAUSS
W. WEBER
E. H. WEBER
E. F. WEBER
POGGENDORF
VON GERSFELD
WEBER
L. W. GILBERT
R. PEARSON
H. WILSON
E. TESCHEMACHER
FISHBURN
MAHLER
JARNIK
STRAUS
ARKIN
GALLAI
CANTOR
LUCE
WEYL
MINKOWSKI
EINSTEIN
LORENTZ
SOMMERFELD
EHRENFEST
ROBBINS
MALLOWS
MANN
COURANT
F. MACWILLIAMS
FEIT
HILBERT
THOMPSON
VON NEUMANN
A. MACWILLIAMS
F. P. RAMSEY
CONWAY
GUY
COXETER
BERLEKAMP
DEUBER
RADO
BOAS
HAJNAL
SIMONOVITS
RÉNYI
NIVEN
SPENCER
SÁRKÖZY
SZEMERÉDI
LOVÁSZ
F. ROBERTS
SUPPES
GRUNBAUM
NORMAN
LEECH
SLOANE
ODLYZKO
STANLEY
DAVENPORT
BURR
FAUDREE
SCHELP
BABAI
FEJES-TOTH
KO
STONE
HOBBS
FLEISCHNER
WALLIS
T. ROBERTS
LESNIAK-FOSTER
STRAIGHT
GORDON
BAKER
STARK
SERRE
DELIGNE
SHAFAREVICH
NOVIKOV
RABIN
SHANNON
MOTZKIN
BOSE
GAREY
GRIGGS
KLARNER
G. W. PECK
WEST
KNUTH
A. YAO
F. YAO
ROTHSCHILD
KATONA
LEEB
WANG
KLEITMAN
HALL
HOFFMAN
BUCKLEY
W. BROWN
ODDA
FOLKMAN
D. LEHMER
E. LEHMER
SELFRIDGE
BRILLHART
DIACONIS
R. LI
W. LI
KAC
EVEN
ULAM
STEIN
SÓS
TURÁN
FULKERSON
POLYA
TARTAR
BERMOND
BOLLOBÁS
F. CHUNG
SZEGÖ
BERGE
ROSA
HUANG
KAPLANSKY
RIORDAN
GILBERT
SLEPIAN
POLLAK
CARLITZ
BLACKWELL
FOATA
N. GRAHAM
KARP
ROMANOS
VAN LINT
DE BRUIJN
SZEKERES
GILENBERG
MAC LANE
RHODES
HARPER
TILSON
DUKE
CAPOBIANCO
MOLLUZZO
FOLDES
CACCETTA
HAGGKVIST
D. DESCARTES
NASH-WILLIAMS
H. FERRARI
DEZA
CATLIN
FRANKL
SABIDUSSI
ALSPACH
T. BROWN
REID
MOON
PARSONS
MOSER
LONGYEAR
LEVINSON
SILVERMAN
BERMAN
PALMER
KOTZIG
HEDETNIEMI
CHARTRAND
SCHWENK
ROBINSON
PULTR
NEŠETŘIL
CHVATALOVA
BLOOM
RÖDL
BONDY
MURTY
HEMMINGER
PRINS
BARI
WHITE
TINDELL
BOESCH
IMRICH
HEDRLIN
BEINEKE
GOLOMB
DEWDNEY
WATKINS
SCHNEICHEL
MELTER
ROTA
BISKOFF
CRAPO
DYER
McCARTHY
SUFFICK
HAGGARD
FELLER
TARSKI
SCHINZEL
HANANI
AUSLANDER
FRUCHT
GEWIRTZ
QUINTAS
R. TAYLOR
McELIECE
RUMSEY

Happy ending - 3 del

Zaradi Erdős-Szekeresevega izreka lahko vpeljamo funkcijo $f(n)$ takole.

Definicija. Za pozitivno celo število n, $n \geq 3$, naj bo $\mathbf{f(n)}$ najmajnšo število, za katero velja, da vsak $f(n)$ točk v splošnem položaju vsebuje konveksni n-kotnik.

Happy ending - 3 del

Zaradi Erdős-Szekeresevega izreka lahko vpeljamo funkcijo $f(n)$ takole.

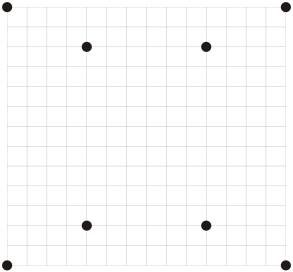
Definicija. Za pozitivno celo število n, $n \geq 3$, naj bo $\mathbf{f(n)}$ najmajnšo število, za katero velja, da vsak $f(n)$ točk v splošnem položaju vsebuje konveksni n-kotnik.

Torej velja neenakost

$$f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1.$$

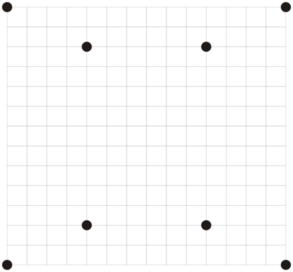
Erdősu in Szekeresu je bil uspelo tudi sestaviti množico 2^{n-2} točk v splošnem položaju, ki ne vsebuje konveksnega n-kotnika.

Erdősu in Szekeresu je bil uspelo tudi sestaviti množico 2^{n-2} točk v splošnem položaju, ki ne vsebuje konvexnega n-kotnika.



Osem točk brez konveksnega petkotnika.

Erdősu in Szekeresu je bil uspelo tudi sestaviti množico 2^{n-2} točk v splošnem položaju, ki ne vsebuje konvexnega n-kotnika.



Osem točk brez konveksnega petkotnika.

Torej velja tudi neenakost

$$2^{n-2} + 1 \leq f(n).$$

Najboljšo zgornjo mejo za $f(n)$ sta našla G. Tóth in P. Valtr leta 1998.

$$f(n) \leq \binom{2n-5}{n-3} + 2.$$

Najboljšo zgornjo mejo za $f(n)$ sta našla G. Tóth in P. Valtr leta 1998.

$$f(n) \leq \binom{2n-5}{n-3} + 2.$$

$$\binom{2n-5}{n-3} \approx \frac{1}{2}\binom{4n-4}{n-2}.$$

Torej števila $f(n)$ zadoščajo

$$2^{n-2} + 1 \leq \; f(n) \; \leq \binom{2n-5}{n-3} + 2.$$

Torej števila $f(n)$ zadoščajo

$$2^{n-2}+1 \leq \; f(n) \; \leq \binom{2n-5}{n-3}+2.$$

Odprti matematični problem je določiti natančno vrednost $f(n)$ za vsak n.

Očitno je, da je $f(3) = 3$, in smo že videli, da je $f(4) = 5$.

Očitno je, da je $f(3) = 3$, in smo že videli, da je $f(4) = 5$.

$$\boxed{\mathrm{f}(5) = 9}$$

To je bilo znano E. Makaiu že okoli leta 1933, ampak prvi dokaz, ki ga dal W. E. Bonnice, je bil posredovan samo leta 1974 v reviji *American Mathematical Monthly*

Očitno je, da je $f(3) = 3$, in smo že videli, da je $f(4) = 5$.

$$\boxed{\mathrm{f}(5) = 9}$$

To je bilo znano E. Makaiu že okoli leta 1933, ampak prvi dokaz, ki ga dal W. E. Bonnice, je bil posredovan samo leta 1974 v reviji *American Mathematical Monthly*

$$\boxed{\mathrm{f}(6) = 17}$$

To sta dokazala Gy. Szekeres in L. Peters z uporabo računalnika. Njun rezultat so objavili leta 2006 v reviji *Australian & New Zeland Industrial and Applied Mathematics Journal*.

$$\boxed{f(7) = ?}$$

$\boxed{\text{f(7) = ?}}$

Szekereseva domneva. $f(n) = 2^{n-2} + 1.$

$$\boxed{f(7) = ?}$$

Szekereseva domneva. $f(n) = 2^{n-2} + 1$.

Še tik pred svojo smrtjo leta 1996 je Erdős zapisal, da bi z veseljem plačal 500$ za dokaz, da je $f(n) = 2^{n-2} + 1$.

$\boxed{\text{f(7) = ?}}$

Szekereseva domneva. $f(n) = 2^{n-2} + 1$.

Še tik pred svojo smrtjo leta 1996 je Erdős zapisal, da bi z veseljem plačal 500$ za dokaz, da je $f(n) = 2^{n-2} + 1$.

Leta 1998 sta F.R.L. Chung in R.L. Graham ponudila 100$ tistemu, ki lahko dokaže, da velja $f(n) \approx (4 - c)^n$.

$\boxed{\text{f(7) = ?}}$

Szekereseva domneva. $f(n) = 2^{n-2} + 1$.

Še tik pred svojo smrtjo leta 1996 je Erdős zapisal, da bi z veseljem plačal 500$ za dokaz, da je $f(n) = 2^{n-2} + 1$.

Leta 1998 sta F.R.L. Chung in R.L. Graham ponudila 100$ tistemu, ki lahko dokaže, da velja $f(n) \approx (4 - c)^n$.

Če želite dobiti 500$, preverite domnevo!

Eszter Klein in György Szekeres sta umrla na isti dan, z eno uro razlike, 28 avgusta 2005, v avstralski bolnišnici, v skupni sobi. Kleinova je bila stara 95 let, Szekeres pa 94.

Eszter Klein in György Szekeres v letu 2002

HVALA ZA POZORNOST!