

# Kompleksni grafi in omrežja

Dragan Stevanović

FAMNIT—Univerza na Primorskem, Koper, Slovenia

# Kaj so kompleksna omrežja?

Grafi ali omrežja z netrivialnih lastnostih, ki se ne pojavljajo v enostavnih omrežij, kot so slučajni grafi, ali se pogosto pojavljajo v realnih primerih.

- Socialna omrežja
- Internet in web
- Biološka omrežja
- ...



## Šest stopinj ločitve

Marconi, ki je izumil radio, je začetkom 20. stoletja dal izziv najti kakšno drugo osebo, s katerom se ne bo mogel povezovati prek največ pet ljudi.

Naj bo celotno človeštvo eno socialno omrežje. Kakšna je povprečna dolžina poti med vsake dve osebe?

1967. ameriški socialni psiholog Stanley Milgram je poskusil najti takšno povprečno dolžino v ZDA.

## Milgramov poskus

Milgram bi izbral osebe v Omahi ali Wichiti in jim je dal paket za eno samo osebo v Bostonu. (Omaha in Wichita so geografski in tudi socialno oddaljene od Bostona.) Če ne poznajo to osebo, Milgram jih je vprašal da paket pošlju kakšnem osebnem prijatelju, ki bi moral bit bolj upoznat s to osebo.

Včasih je paket prišel prek enim ali dvema prijateljema, in je včasih paket prišel prek kar devet ali deset prijateljev. V vsakem poskusu, povprečna dolžina poti je vedno bila med 5,5 in 6,0.

Zelo kritiziran poskus, privedel do izraza “šest stopinj ločitve”.

Preizkušen tudi na Facebook-u!



## Erdösevo število

Paul Erdős ima Erdösevo število 0. Vsak drugi matematik ima Erdösevo število  $k + 1$ , kje je  $k$  najmanjše med Erdösevih števil njegovih soavtorjev. Med matematikih, aktivnih v letu 2000 s končnim Erdösevim številom, povprečje je bilo 4.65:

Erdős number 0	1 person
Erdős number 1	502 people
Erdős number 2	5713 people
Erdős number 3	26422 people
Erdős number 4	62136 people
Erdős number 5	66158 people
Erdős number 6	32280 people
Erdős number 7	10431 people
Erdős number 8	3214 people
Erdős number 9	953 people
Erdős number 10	262 people
Erdős number 11	94 people
Erdős number 12	23 people
Erdős number 13	42 people
Erdős number 14	7 people
Erdős number 15	1 person
Erdős number 16	0 people





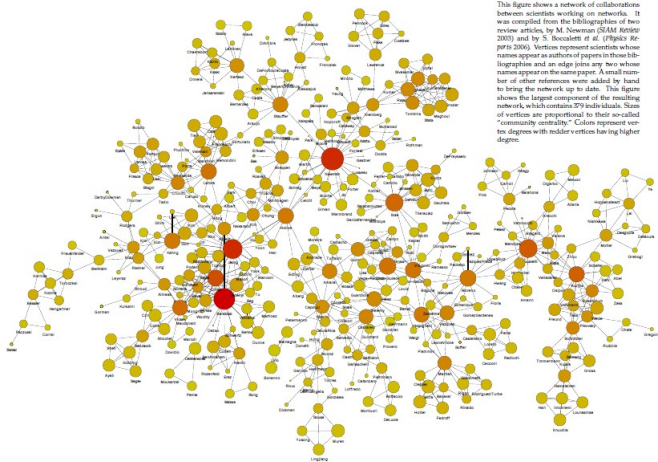
## Baconovo število

Podobno kot za Erdősevo število:

- Kevin Bacon ima Baconovo število 0.
- Baconovo število akterjem ki so igrali skupaj z Baconom je 1.
- Za vsakeg drugeg akterja  $X$ , če je  $N$  najmanjše Baconovo število akterja ki je igral skupaj z  $X$ , potem je Baconovo število za  $X$  enako  $N + 1$ .

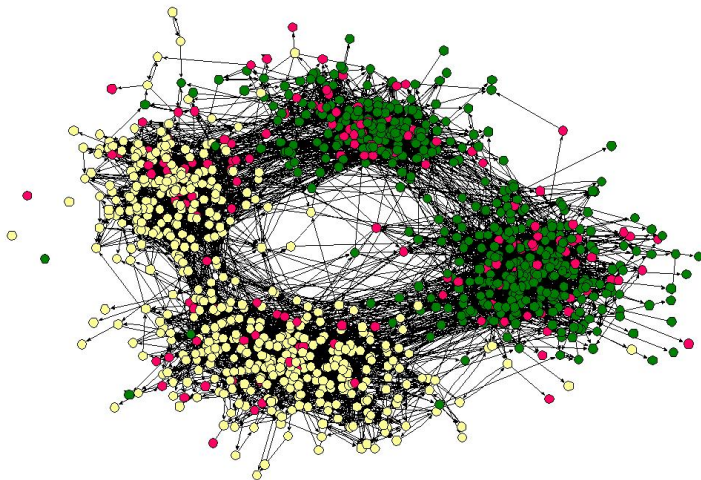
Decembra 2010. največje končno Baconovo število je bilo 9.  
Samo 12% vseh akterjev ne mora biti povezovano z Baconom.

# Sodelovanje znanstvenika

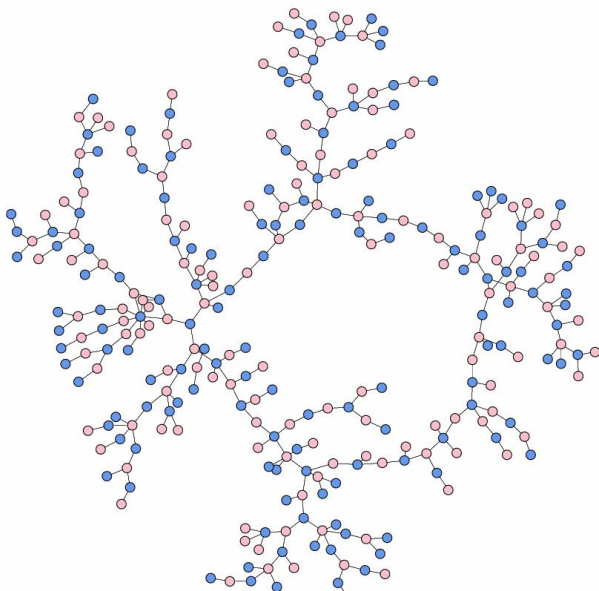


This figure shows a network of collaborations between scientists working on networks. It was compiled from the bibliographies of two review articles, by M. Newman (*SIAM Review* 2003) and by S. Boccaletti et al. (*Physics Reports* 2006). Vertices represent scientists whose names appear as authors of papers in those bibliographies and an edge joins any two whose names appear on the same paper. A small number of other references were added by hand to bring the network up to date. This figure shows the largest component of the resulting network, which contains 279 individuals. Sizes of vertices are proportional to their so-called "community centrality." Colors represent vertex degrees with redder vertices having higher degrees.

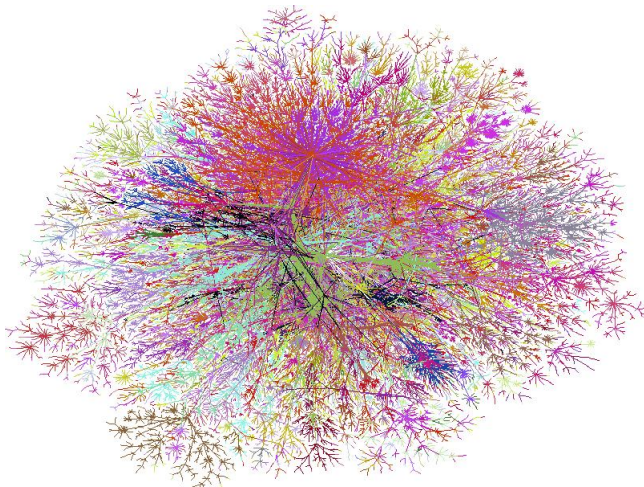
## Prijateljstva v srednji šoli



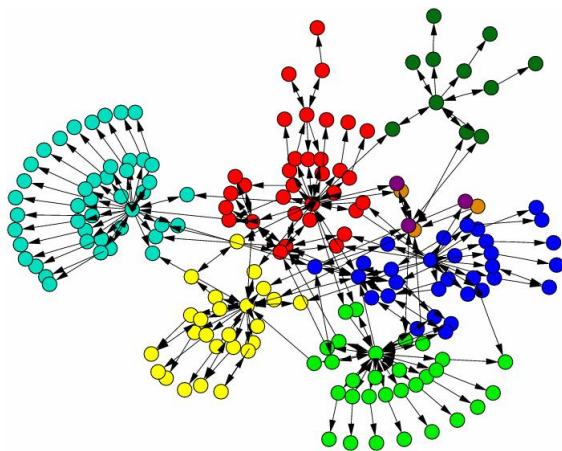
# Ljubzenska razmerja v srednji šoli



# Računalniki na delu Interneta

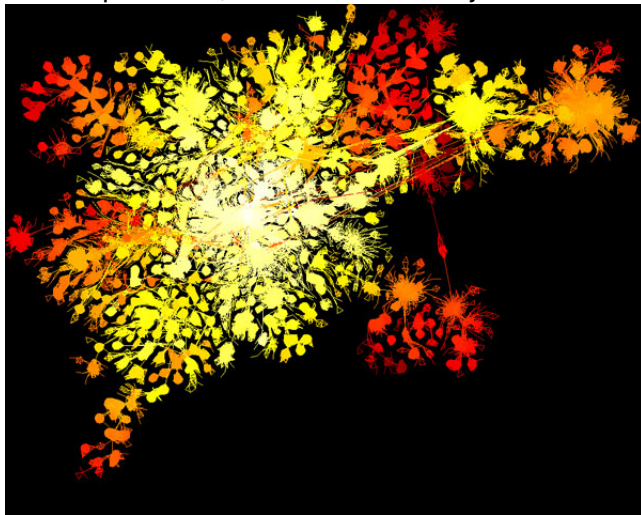


# Spletne strani na strežniku



## Omrežje razmerij med proteinov

Proteini ki imajo slična zaporedja amino kislin so povezani.  
30 727 proteinov, 1 206 654 razmerij.



# Kakšne so lastnosti realnih kompleksnih omrežij?



## Majhni diameter

Diameter realnih omrežij je majhen v sorazmerju z številom točk: okoli  $\log n$ .

Med 100 000 000 ljudi je dovolj "okoli" 8 prijateljev da se vsaka dva povezata med seboj.

## Veliki skupni koeficijent

Kakšen odstotek tvojih prijateljev je povezano med seboj?

Če imaš  $k_i$  prijateljev, in če med njimi ima  $e_i$  prijateljstev, tvoj *skupni koeficijent* je

$$C_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)}.$$

Skupni koeficijent omrežja je povprečje prek vseh točk omrežja.

Realna omrežja imajo veliki skupni koeficijent (več kot 0.5).



## Stopnje točk so *scale-free*

Barabasi in Albert (1999) so opazovali da so stopnje točk v omrežji sodelovanja glumcev in spletnih strani razporejene po *power law*:

$$p_k \approx Ck^{-\gamma}.$$

Takšna omrežja so *scale-free*. Največ realnih omrežij ima  $2 < \gamma < 3$ :

- Za spletne strani:  $\gamma_{in} = 2, 1$ ,  $\gamma_{out} = 2, 7$ .
- Za računalnike na Internetu:  $\gamma = 2, 16$ .
- Za sodelovanje med aktorjev:  $\gamma = 2, 3$ .
- Za sodelovanje med matematiki:  $\gamma = 2, 4$ .



# Modeli kompleksnih omrežij

## Erdős-Rényi slučajni grafi

Naj bo  $\mathcal{G}_{n,M}$  množica vseh  $\binom{N}{M}$  grafov z  $n$  točk in  $M$  povezav ( $N = \binom{n}{2}$ ). Če takšne grafe izbiramo slučajno z enakom verjetnosti, dobimo Erdős-Rényi slučajni graf.

### Glavno odkritje:

Če je  $M \ll \frac{n \log n}{2}$ , tipičan  $G_{n,M}$  ni povezan.

Če je  $M \gg \frac{n \log n}{2}$ , tipičan  $G_{n,M}$  je povezan.

Gilbertovi slučajni grafi so podobni:  $G_{n,p}$  za  $0 \leq p \leq 1$  pomeni da se vsaka mogoča povezava izbira z verjetnostjo  $p$ .

Verjetnost  $p = \frac{1}{n}$  je *kritična* za povezanost grafa.

## Slučajni grafi

Slučajni grafi nimajo lastnosti realnih omrežij!

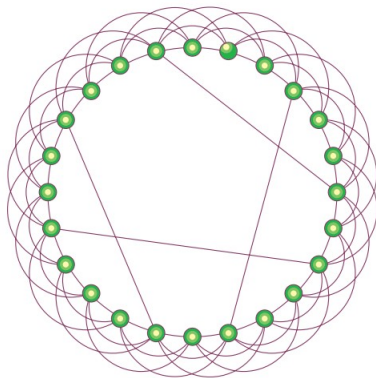
Vse točke imajo približno isto stopnjo.

Majhni skupni koeficijent: okoli  $\frac{M-1}{8} \frac{(\log n)^2}{n}$ .

# Omrežja majhnih svetov

## Strogatz in Watts

Omrežje majhnega sveta: začnemo s točkama razporejenim po krogu, in vsakega povežemo s  $k$  najbližjih točk (levo in desno). Nato dodamo nove povezave med slučajnih parov točk, s verjetnostjo  $p$ .



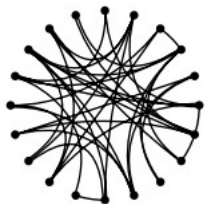
Regular



Small-world



Random



$p = 0$



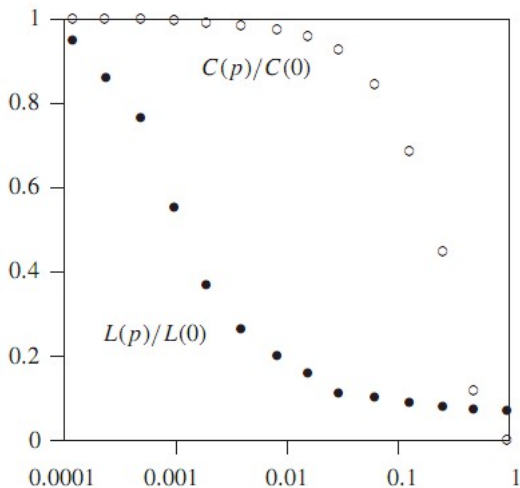
$p = 1$

Increasing randomness



## Lastnosti majhnih svetov

Celo za majhne vrednosti  $p$ , povprečna dolžina poti med točkah je okoli  $\log n$ , skupni koeficijent je pa vedno veliki.



## Albert-Barabasi model

Začevši z majhnim številom ( $m_0$ ) točk, v vsakem trenutku dodamo novo točko z  $m(\leq m_0)$  povezav, ki povezujejo novo točko z  $m$  različnih točk ki so že v omrežju. Verjetnost da nova točka bo povezana s obstoječom točkom  $i$  je sorazmerna stopnji točke  $i$ .

*Preferencialno povezovanje:* Mogoče ljudje postajo bolj privlačni če so imali več partnerjev?

(So bolj izkušeni :)

## Lastnosti Albert-Barabasi modela

Albert-Barabasi omrežja so *scale-free* z  $\gamma = 3$ :

$$p_k = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}.$$

Majhni diamater: okoli  $\log n / \log \log n$ .

## Znanost o kompleksnih omrežij?

Opazovanja o majhnem dijametru realnih omrežij in prvi modeli kompleksnih omrežij (small-world in Barabasijev model) so privedli do eksplozije raziskav.

To pa še ni *znanost* o kompleksnih omrežjih, kar veliko člankov so poskusi, simulacije in uporablja neformalne argumente.

V primerjavi z astronomijo, znanost o kompleksnih omrežij se zdaj nahaja nekje okoli Nikole Kopernika (pre Galilea in pre Keplera).