Dragi polinom, kje so tvoje ničle?

Vito Vitrih

FAMNIT - Izlet v matematično vesolje

17. december 2010

Polinomi:

- Polinom stopnje n je funkcija

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

Polinomi:

- Polinom stopnje n je funkcija

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

- Zgledi:
  - $p(x) = a_0$ konstantna funkcija,
  - $p(x) = a_1 x + a_0$ premica,
  - $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ parabola.

Polinomi:

Polinomi so najenostavnejše nelinearne funkcije:

- preprosto odvajanje (odvod polinoma je polinom),
- preprosto integriranje (integral polinoma je polinom),
- preprost izračun vrednosti polinoma v neki točki

  Hornerjev algoritem:

$$p(x) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})\,x + a_{n-2})\,x + \ldots + a_1)\,x + a_0.$$

Polinomi:

Fundamentalni izrek algebre:

Polinom stopnje n z realnimi koeficienti ima natanko n ničel v $\mathbb{C}$.

Polinomi:

Fundamentalni izrek algebre:

Polinom stopnje n z realnimi koeficienti ima natanko n ničel v $\mathbb{C}$.

Izrek:

Kompleksne ničle nastopajo v konjugiranih parih (jih je vedno sodo mnogo).

Polinomi:

Fundamentalni izrek algebre:

Polinom stopnje n z realnimi koeficienti ima natanko n ničel v $\mathbb{C}$.

Izrek:

Kompleksne ničle nastopajo v konjugiranih parih (jih je vedno sodo mnogo).

Posledica:

Polinom lihe stopnje ima vsaj eno realno ničlo.

Kje so ničle polinoma?

Izrek [Descartes]:

Število pozitivnih ničel polinoma je enako številu menjav predznakov v zaporedju neničelnih koeficientov polinoma, ali pa je enako temu številu minus nek večkratnik števila 2.

Kje so ničle polinoma?

Izrek [Descartes]:

Število pozitivnih ničel polinoma je enako številu menjav predznakov v zaporedju neničelnih koeficientov polinoma, ali pa je enako temu številu minus nek večkratnik števila 2.

Primer:

$$p(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)^2(x-1).$$

Kje so ničle polinoma?

- Naj bo p polinom s samimi enostavnimi ničlami.
- Definirajmo polinome:

$$
\begin{gathered}
p_0(x) := p(x), \quad p_1(x) := p'(x), \quad p_2(x) := -rem(p_0, p_1), \\
\ldots, \; p_n(x) := -rem(p_{n-2}, p_{n-1}), \quad 0 = -rem(p_{n-1}, p_n).
\end{gathered}
$$

- Polinomi $p_0, p_1, \ldots, p_n$ tvorijo Sturmovo zaporedje.

Kje so ničle polinoma?

- Naj bo p polinom s samimi enostavnimi ničlami.
- Definirajmo polinome:

$$p_0(x) := p(x), \quad p_1(x) := p'(x), \quad p_2(x) := -rem(p_0, p_1),$$
$$\ldots, \; p_n(x) := -rem(p_{n-2}, p_{n-1}), \quad 0 = -rem(p_{n-1}, p_n).$$

- Polinomi $p_0, p_1, \ldots, p_n$ tvorijo Sturmovo zaporedje.

Izrek [Sturm]:

Naj $\sigma(\xi)$ označuje število menjav predznakov v zaporedju $p_0(\xi), p_1(\xi), \ldots, p_n(\xi)$. Število različnih realnih ničel polinoma p na intervalu $(a, b]$ je enako $\sigma(a) - \sigma(b)$.

Kje so ničle polinoma?

Primer:

$$p(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x, \qquad I = (0, 2].$$

- $p_0 = x^3 - 3x^2 + 2x$
- $p_1 = 3x^2 - 6x + 2$
- $p_2 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$
- $p_3 = 1$

Kje so ničle polinoma?

Primer:

$p(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x, \qquad I = (0, 2].$

- $p_0 = x^3 - 3x^2 + 2x$
- $p_1 = 3x^2 - 6x + 2$
- $p_2 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$
- $p_3 = 1$

- $p_0(0) = 0,\ p_1(0) = 2,\ p_2(0) = -\frac{2}{3},\ p_3(0) = 1.$
- $p_0(2) = 0,\ p_1(2) = 2,\ p_2(2) = \frac{2}{3},\ p_3(2) = 1.$

- $\sigma(0) - \sigma(2) = 2.$

Kje so ničle polinoma?

Ničle polinoma stopnje 1:

- $a_1 x + a_0 = 0$
- $x = -\frac{a_0}{a_1}$
- ničla je realna

Kje so ničle polinoma?

Ničle polinoma stopnje 1:

- $a_1 x + a_0 = 0$
- $x = -\frac{a_0}{a_1}$
- ničla je realna

Ničle polinoma stopnje 2:

- $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$
- $x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}}{2 a_2}$
- obe ničli sta realni ali pa obe kompleksni

Kje so ničle polinoma? Cardano

Ničle polinoma stopnje 3:

- $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$
- $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$
- substitucija: $t = x + \frac{a_2}{3}$
- $t^3 + pt + q = 0$
- vstavimo $t = u + v, \quad v = -\frac{p}{3u}$
- u^3 in v^3 sta ničli enačbe $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$
- imamo 3 realne ničle ali 1 realno in 2 kompleksni ničli

Kje so ničle polinoma? Ferrari

Ničle polinoma stopnje 4:

- $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$
- imamo $4, 2$ ali 0 realnih ničel
- substitucija: $t = x + \frac{a_3}{4}$
- $t^4 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$
- prištejemo tej enačbi enakosti

$$(t^2 + \alpha)^2 - t^4 - 2\alpha t^2 = \alpha^2$$

$$(t^2 + \alpha + y)^2 - (t^2 + \alpha)^2 = (\alpha + 2y)t^2 + 2y\alpha + y^2 - \alpha t^2$$

Kje so ničle polinoma? Ferrari

- Dobimo:

$$(t^2 + \alpha + y)^2 = (\alpha + 2y)t^2 - \beta t + (2y\alpha + y^2 + \alpha^2 - \gamma) \qquad (1)$$

- Želimo, da je desna stran popolni kvadrat in to določa y:
- Dobimo kubično enačbo za y, ki jo znamo rešiti

$$y^3 + \frac{5}{2}\alpha y^2 + (2\alpha^2 - \gamma)y + \left(\frac{\alpha^3}{2} - \frac{\alpha\gamma}{2} - \frac{\beta^2}{8}\right) = 0.$$

- Vzamemo poljubno rešitev za y in tako nam enakost (1) da dve kvadratni enačbi za t.
- Torej: imamo 4 rešitve za $t \Rightarrow$ 4 rešitve za x.

Kje so ničle polinoma?

Ničle polinoma stopnje več kot 4:

- Se v splošnem ne dajo izračunati z osnovnimi operacijami $+, -, *, /, \sqrt{\ }$.

Kje so ničle polinoma?

Ničle polinoma stopnje več kot 4:

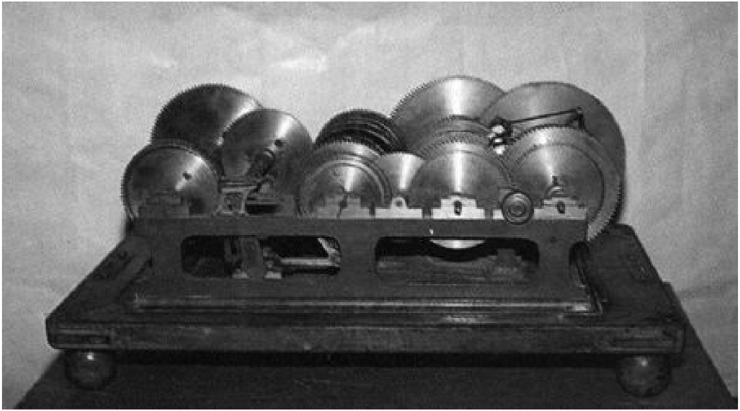
- Se v splošnem ne dajo izračunati z osnovnimi operacijami $+,\ -,\ *,\ /,\ \sqrt{}$.
- V praktičnih aplikacijah smo običajno zadovoljni, če uspemo ničle poiskati dovolj natančno (poiskati dober približek).

Kje so ničle polinoma?

Ničle polinoma stopnje več kot 4:

- Se v splošnem ne dajo izračunati z osnovnimi operacijami $+, -, *, /, \sqrt{}$.
- V praktičnih aplikacijah smo običajno zadovoljni, če uspemo ničle poiskati dovolj natančno (poiskati dober približek).
- Uporabljamo NUMERIČNE METODE.

Numerične metode:



Slika: Druga polovica 19. stoletja

Numerične metode:

Slika: Prva polovica 20. stoletja

Numerične metode:

Metode:

- bisekcija
- metoda regula falsi
- navadna iteracija
- tangentna metoda
- sekantna metoda
- Müllerjeva metoda

Numerične metode:

Metode:

- bisekcija
- metoda regula falsi
- navadna iteracija
- tangentna metoda
- sekantna metoda
- Müllerjeva metoda

Te metode delujejo tudi za iskanje ničel bolj splošnih nelinearnih funkcij.

Bisekcija:

- Izbrati moramo začetni interval $[a, b]$, kjer je funkcija (polinom) v krajiščih različno predznačena.

Izrek:

Če je f zvezna funkcija na $[a, b]$ in velja $f(a)\,f(b) < 0$, potem obstaja $\xi \in (a, b)$, tako da je $f(\xi) = 0$.

Numerične metode:

Bisekcija:

- Izbrati moramo začetni interval $[a, b]$, kjer je funkcija (polinom) v krajiščih različno predznačena.

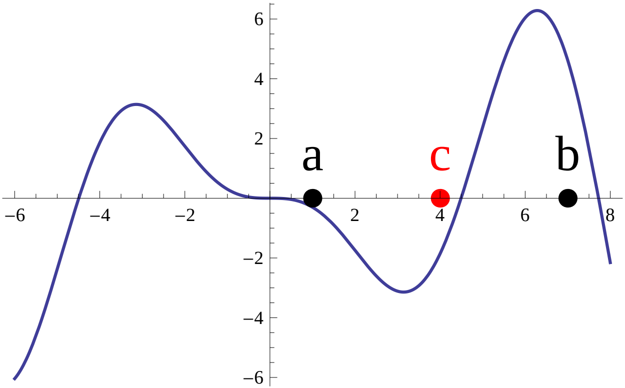
Izrek:

Če je f zvezna funkcija na $[a, b]$ in velja $f(a)\,f(b) < 0$, potem obstaja $\xi \in (a, b)$, tako da je $f(\xi) = 0$.

Postopek:

- $c := \frac{a+b}{2}$
- če je $f(a)f(c) > 0$, potem za novi a vzamemo $a := c$, sicer za novi b vzamemo $b := c$
- to ponavljamo, dokler interval $[a, b]$ ni dovolj majhen
- rezultat je sredina zadnjega intervala

Numerične metode:



Slabosti:

- Metoda odpove pri ničlah sode stopnje.

  Na primer za funkcijo $f(x) = x^2$.

- Najde le eno ničlo na $[a, b]$ (ne moremo vnaprej povedati katero).

- konvergenca je linearna (kar pomeni dokaj počasna).

Numerične metode:

Slabosti:

- Metoda odpove pri ničlah sode stopnje.

  Na primer za funkcijo $f(x) = x^2$.

- Najde le eno ničlo na $[a, b]$ (ne moremo vnaprej povedati katero).

- konvergenca je linearna (kar pomeni dokaj počasna).

Prednosti:

- Če začetni interval pravilno izberemo, potem je konvergenca zagotovljena.

Metoda Regula falsi:

- Ponovno moramo izbrati začetni interval $[a, b]$, kjer je funkcija v krajiščih različno predznačena.

Postopek:

- $c := b - f(b)\,\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}$
- če je $f(a)f(c) > 0$, potem za novi a vzamemo $a := c$, sicer za novi b vzamemo $b := c$
- to ponavljamo, dokler interval $[a, b]$ ni dovolj majhen
- rezultat je sredina zadnjega intervala

Numerične metode:

Metoda Regula falsi:

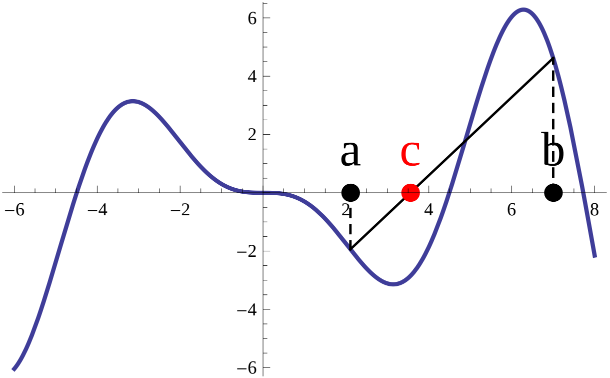
- Ponovno moramo izbrati začetni interval $[a, b]$, kjer je funkcija v krajiščih različno predznačena.

Postopek:

- $c := b - f(b)\,\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}$
- če je $f(a)f(c) > 0$, potem za novi a vzamemo $a := c$, sicer za novi b vzamemo $b := c$
- to ponavljamo, dokler interval $[a, b]$ ni dovolj majhen
- rezultat je sredina zadnjega intervala

Lastnosti: podobne kot pri bisekciji.

Numerične metode:



Navadna iteracija (metoda negibne točke):

- Namesto ničle funkcije f iščemo negibno točko iteracijske funkcije g.

Navadna iteracija (metoda negibne točke):

- Namesto ničle funkcije f iščemo negibno točko iteracijske funkcije g.
- Veljati mora:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x.$$

Navadna iteracija (metoda negibne točke):

- Namesto ničle funkcije f iščemo negibno točko iteracijske funkcije g.
- Veljati mora:
$$f(x) = 0 \iff g(x) = x.$$
- Primer:
$$f(x) = x^3 - 5x, \qquad g_1(x) = \frac{x^3}{5}, \quad g_2(x) = \sqrt[3]{5x}.$$

Numerične metode:

Kako poiščemo negibno točko funkcije g?

Numerične metode:

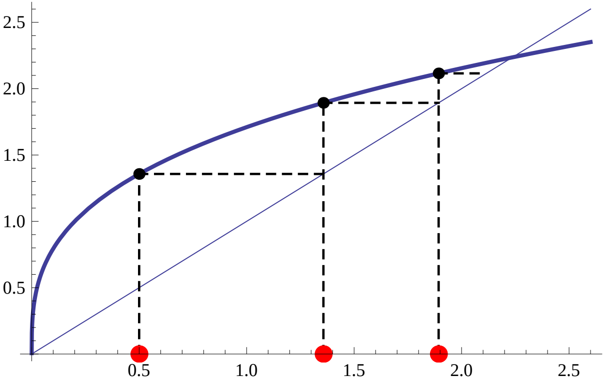
Kako poiščemo negibno točko funkcije g?

- Izberemo si nek x_0 (začetni približek).
- Izvajamo iteracijo

$$x_{r+1} = g(x_r), \quad r = 0, 1, \ldots .$$

- Iteracijo izvajamo dokler velja $|x_{r+1} - x_r| > \varepsilon$.
- Zaporedje $x_0, x_1, \ldots$ lahko konvergira proti neki negibni točki ali pa tudi ne.
- Z izbiro začetnega približka lahko deloma vplivamo na to, h kateri negibni točki bo zaporedje konvergiralo.
- Če na nekem intervalu $[a, b]$ (ki vsebuje negibno točko) za vsak $x \in [a, b]$ velja $|g'(x)| < 1$, potem naše zaporedje zagotovo skonvergira k negibni točki.

Numerične metode:



Tangentna metoda:

- Če za iteracijsko funkcijo vzamemo

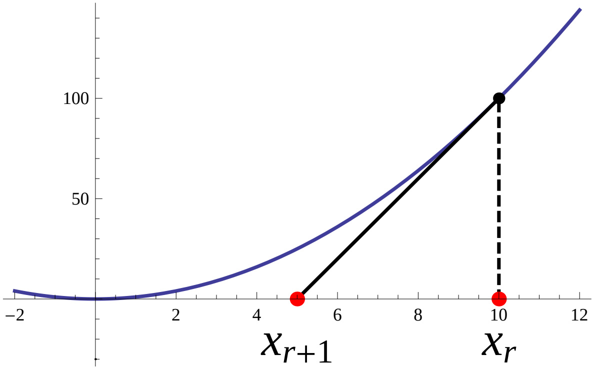
$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

potem jo imenujemo tangentna metoda.

- Iteracija:

$$\text{izberemo} \quad x_0, \qquad x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Numerične metode:



Numerične metode:

Slabosti:

- Metoda ne konvergira za vsak x_0.
- Poznati moramo tudi odvod funkcije.

Numerične metode:

Slabosti:

- Metoda ne konvergira za vsak x_0.
- Poznati moramo tudi odvod funkcije.

Prednosti:

- Konvergenca je v bližini ničle kvadratična (precej boljša od bisekcije in metode regula falsi).

Numerične metode:

Sekantna metoda:

- Namesto tangente v točki $(x_r, f(x_r))$ vzamemo sekanto skozi točki $(x_{r-1}, f(x_{r-1}))$ in $(x_r, f(x_r))$.
- V prvem koraku moramo izbrati dva začetna približka x_0 in x_1.

Numerične metode:

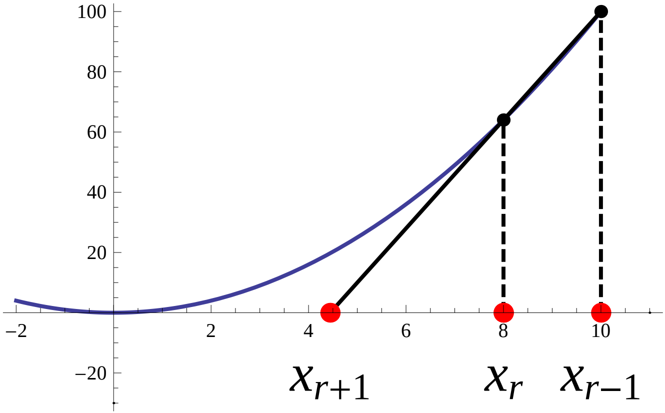
Sekantna metoda:

- Namesto tangente v točki $(x_r, f(x_r))$ vzamemo sekanto skozi točki $(x_{r-1}, f(x_{r-1}))$ in $(x_r, f(x_r))$.
- V prvem koraku moramo izbrati dva začetna približka x_0 in x_1.

Lastnosti:

- Metoda ne konvergira za poljubna x_0 in x_1.
- Konvergenca je malce počasnejša kot pri tangentni metodi (je superlinearna).
- V primerjavi s tangentno metodo tukaj ne potrebujemo odvodov.

Numerične metode:



Numerične metode:

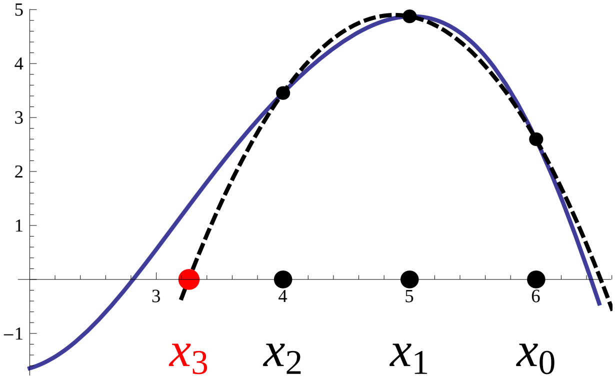
Müllerjeva metoda:

- Potrebujemo tri začetne približke x_0, x_1 in x_2.
- Skozi točke $(x_{r-2}, f(x_{r-2}))$, $(x_{r-1}, f(x_{r-1}))$ in $(x_r, f(x_r))$ napeljemo parabolo.
- Za nov približek x_{r+1} vzamemo tisto ničlo parabole, ki je bližje zadnjemu približku.
- Ker ima parabola lahko tudi kompleksne ničle, so ti približki lahko tudi kompleksni.

Müllerjeva metoda:

- Potrebujemo tri začetne približke x_0, x_1 in x_2.
- Skozi točke $(x_{r-2}, f(x_{r-2}))$, $(x_{r-1}, f(x_{r-1}))$ in $(x_r, f(x_r))$ napeljemo parabolo.
- Za nov približek x_{r+1} vzamemo tisto ničlo parabole, ki je bližje zadnjemu približku.
- Ker ima parabola lahko tudi kompleksne ničle, so ti približki lahko tudi kompleksni.
- Metodo uporabljamo za iskanje kompleksnih ničel.

Numerične metode:



Numerične metode:

Poglejmo na kratko še nekaj metod, ki so posebej prirejene za delo s polinomi

- Laguerrova metoda
- Durand-Kernerjeva metoda
- Aberth-Ehrlichova metoda

Laguerrova metoda:

Ponavljamo postopek:

$$S_1 = \frac{p'(z_r)}{p(z_r)}$$

$$S_2 = \frac{p'(z_r)^2 - p(z_r)p''(z_r)}{p(z_r)^2}$$

$$z_{r+1} = z_r - \frac{n}{S_1 \pm \sqrt{(n-1)(nS_2 - S_1^2)}}$$

Numerične metode:

Lastnosti:

- Če ima polinom p same realne ničle, potem je zagotovljena konvergenca k najbližji ničli za poljuben začetni približek z_0.
- Hitrost konvergence je kubična (hitreje kot tangentna metoda).
- Deluje tudi za kompleksne ničle.

Numerične metode:

Durand-Kernerjeva metoda:

- Metoda, ki naenkrat izračuna vse ničle polinoma!

Numerične metode:

Durand-Kernerjeva metoda:

- Metoda, ki naenkrat izračuna vse ničle polinoma!
- $p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$.
- Naj bodo $z_1, z_2, \ldots, z_n$ približki za ničle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
- Iščemo popravke $\Delta z_1, \Delta z_2, \ldots, \Delta z_n$, da bodo $z_1 + \Delta z_1, z_2 + \Delta z_2, \ldots, z_n + \Delta z_n$ prave ničle.
- Torej: $(z - (z_1 + \Delta z_1)) \cdots (z - (z_n + \Delta z_n)) = p(z)$.

Numerične metode:

Durand-Kernerjeva metoda:

- Metoda, ki naenkrat izračuna vse ničle polinoma!
- $p(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$.
- Naj bodo $z_1, z_2, \ldots, z_n$ približki za ničle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
- Iščemo popravke $\Delta z_1, \Delta z_2, \ldots, \Delta z_n$, da bodo $z_1+\Delta z_1, z_2+\Delta z_2, \ldots, z_n+\Delta z_n$ prave ničle.
- Torej: $(z-(z_1+\Delta z_1))\cdots(z-(z_n+\Delta z_n)) = p(z)$.
- Uredimo po členih Δz_i:

$$p(z) = \prod_{j=1}^{n}(z-z_j) - \sum_{j=1}^{n}\Delta z_j \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z-z_k) + \sum_{\substack{j,k=1\\j\neq k}}^{n}\Delta z_j \Delta z_k \prod_{\substack{\ell=1\\\ell\neq j,k}}^{n}(z-z_\ell) + \ldots$$

Numerične metode:

- Če zanemarimo kvadratne in višje člene, bodo Δz_i le približni popravki.
- Vstavimo še $z = z_i$:

$$p(z_i) = \prod_{j=1}^{n}(z_i - z_j) - \sum_{j=1}^{n} \Delta z_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n}(z_i - z_k) = -\Delta z_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n}(z_i - z_k),$$

oziroma

$$\Delta z_i = \frac{-p(z_i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n}(z_i - z_k)}.$$

Numerične metode:

- Če zanemarimo kvadratne in višje člene, bodo Δz_i le približni popravki.
- Vstavimo še $z = z_i$:

$$p(z_i) = \prod_{j=1}^{n}(z_i - z_j) - \sum_{j=1}^{n} \Delta z_j \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n}(z_i - z_k) = -\Delta z_i \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n}(z_i - z_k),$$

oziroma

$$\Delta z_i = \frac{-p(z_i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n}(z_i - z_k)}.$$

Metoda:

$$z_i^{(r+1)} = z_i^{(r)} - \frac{p\left(z_i^{(r)}\right)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n}\left(z_i^{(r)} - z_k^{(r)}\right)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ \ r = 0, 1, \ldots$$

Lastnosti:

- Konvergenca v bližini ničel je kvadratična.
- Metoda konvergira skoraj za vsak začetni približek $\mathbf{z}^{(0)}$ (le vse komponente vektorja $\mathbf{z}^{(0)}$ morajo biti različne).
- Za komponente vektorja $\mathbf{z}^{(0)}$ izberemo kar naključnih n kompleksnih števil.

Numerične metode:

Aberth-Ehrlichova metoda:

- Durand-Kernerjevo metodo lahko izboljšamo do kubične konvergence.
- Označimo
$$R_i(z) = -\frac{p(z)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(z-z_k)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$
- Uporabimo tangentno metodo na funkciji $R_i(z)$ v točki z_i:
$$\Delta z_i = -\frac{R_i(z)}{R_i'(z)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$
- Metoda:
$$\Delta z_i = \frac{p(z_i)}{p(z_i)\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{z_i-z_k} - p'(z_i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

HVALA!