

Sprehod skozi zgodovino teorije grafov

Aleksander Malnič

Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
Primorski inštitut za naravoslovje in tehnologijo

Izleti v matematično vesolje

Armerija, Koper
12. oktober 2011

Deset velikih problemov

Deset velikih problemov

- 1 Problem königsberških mostov

Deset velikih problemov

- 1 Problem königsberških mostov
- 2 Hamiltonov problem

Deset velikih problemov

- 1 Problem königsberških mostov
- 2 Hamiltonov problem
- 3 Planarnost

Deset velikih problemov

- 1 Problem königsberških mostov
- 2 Hamiltonov problem
- 3 Planarnost
- 4 Problem 4 barv

Deset velikih problemov

- 1 Problem königsberških mostov
- 2 Hamiltonov problem
- 3 Planarnost
- 4 Problem 4 barv
- 5 Analiza omrežij in pretokov

- 1 Problem königsberških mostov
- 2 Hamiltonov problem
- 3 Planarnost
- 4 Problem 4 barv
- 5 Analiza omrežij in pretokov
- 6 Problem 8 dam

- 1 Problem königsberških mostov
- 2 Hamiltonov problem
- 3 Planarnost
- 4 Problem 4 barv
- 5 Analiza omrežij in pretokov
- 6 Problem 8 dam
- 7 Preštevanje

- ① Problem königsberških mostov
- ② Hamiltonov problem
- ③ Planarnost
- ④ Problem 4 barv
- ⑤ Analiza omrežij in pretokov
- ⑥ Problem 8 dam
- ⑦ Preštevanje
- ⑧ Algoritmčni problemi na grafih

Deset velikih problemov

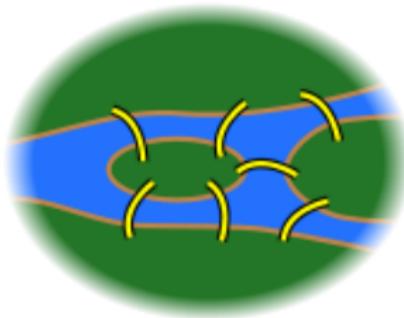
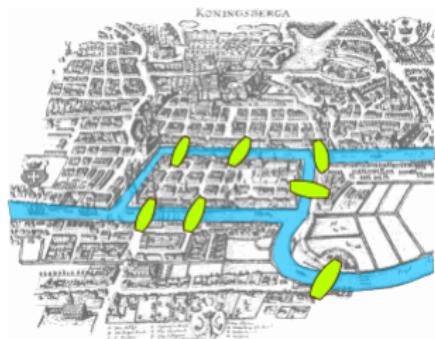
- 1 Problem königsberških mostov
- 2 Hamiltonov problem
- 3 Planarnost
- 4 Problem 4 barv
- 5 Analiza omrežij in pretokov
- 6 Problem 8 dam
- 7 Preštevanje
- 8 Algoritmični problemi na grafih
- 9 Teorija avtomatov

Deset velikih problemov

- 1 Problem königsberških mostov
- 2 Hamiltonov problem
- 3 Planarnost
- 4 Problem 4 barv
- 5 Analiza omrežij in pretokov
- 6 Problem 8 dam
- 7 Preštevanje
- 8 Algoritmični problemi na grafih
- 9 Teorija avtomatov
- 10 Študij simetrije

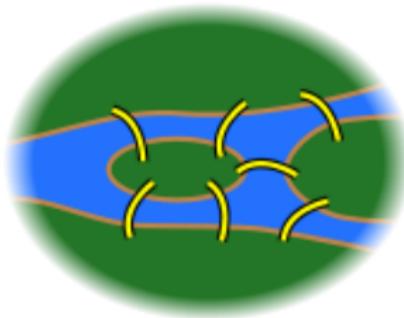
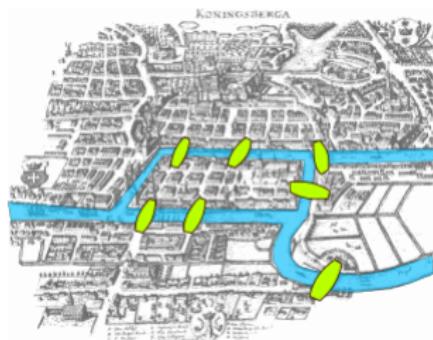
I. Problem königsberških mostov

I. Problem königsberških mostov



Königsberg sredi 18. stoletja (današnji Kaliningrad)

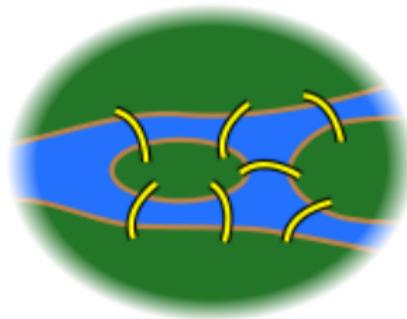
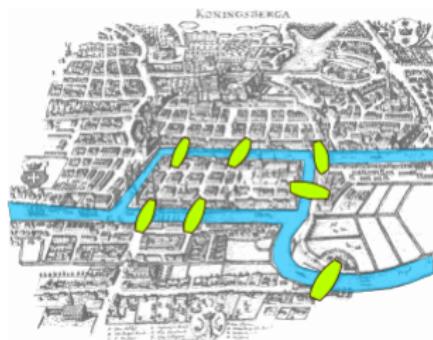
I. Problem königsberških mostov



Königsberg sredi 18. stoletja (današnji Kaliningrad)

C. Goldbach (1690-1764), G. Kirchhoff (1824-1887), D. Hilbert (1862-1943)
E. T. A. Hoffmann (1776-1822), I. Kant (1724-1804)

I. Problem königsberških mostov



Königsberg sredi 18. stoletja (današnji Kaliningrad)

- C. Goldbach (1690-1764), G. Kirchhoff (1824-1887), D. Hilbert (1862-1943)
E. T. A. Hoffmann (1776-1822), I. Kant (1724-1804)
- H. Minkowski (1864-1909), A. Sommerfeld (1868-1951)
H. Arendt (1906-1975)

Leonhard Euler, 1707-1783



Leonhard Euler, 1707-1783

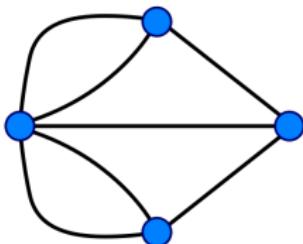
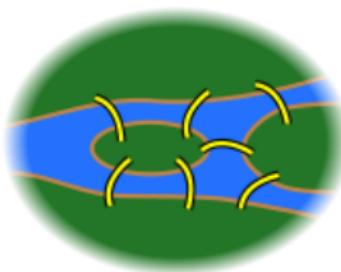


St.Peterburg (1727-1741), Berlin (1741-1766), St.Peterburg (1766-1783)

Leonhard Euler, 1707-1783



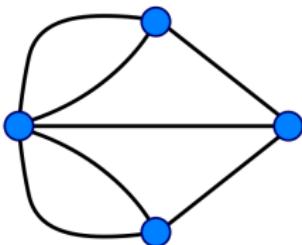
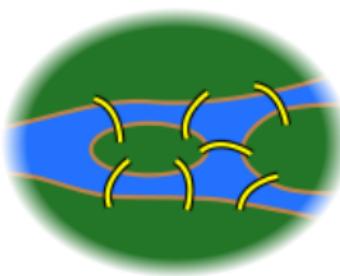
St.Peterburg (1727-1741), Berlin (1741-1766), St.Peterburg (1766-1783)



Leonhard Euler, 1707-1783



St.Peterburg (1727-1741), Berlin (1741-1766), St.Peterburg (1766-1783)



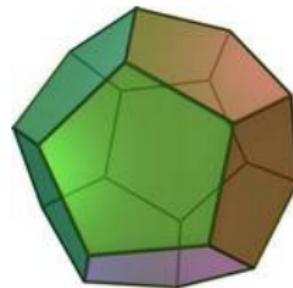
Izrek (Euler, 1736). Povezan graf je Eulerjev \Leftrightarrow stopnje vseh točke sode.

II. Hamiltonov problem

II. Hamiltonov problem



Sir William R. Hamilton, 1805-1865

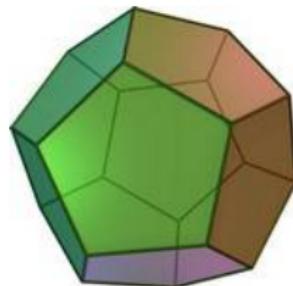


Razvedrilna igra, 1857

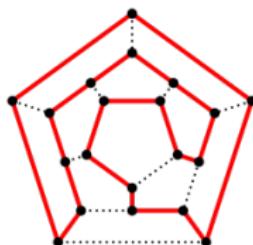
II. Hamiltonov problem



Sir William R. Hamilton, 1805-1865



Razvedrilna igra, 1857

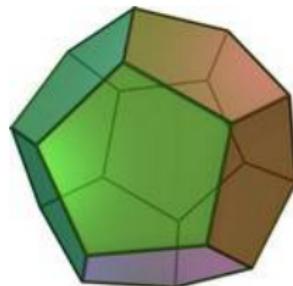


Hamiltonski cikel v grafu dodekaedra

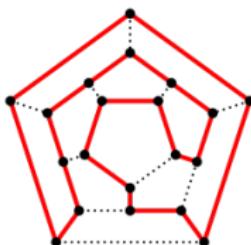
II. Hamiltonov problem



Sir William R. Hamilton, 1805-1865



Razvedrilna igra, 1857



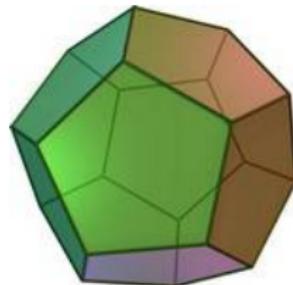
Hamiltonski cikel v grafu dodekaedra

Ali je dani graf hamiltonski?

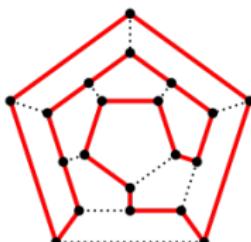
II. Hamiltonov problem



Sir William R. Hamilton, 1805-1865



Razvedrilna igra, 1857



Hamiltonski cikel v grafu dodekaedra

Ali je dani graf hamiltonski?

Algoritmično težak problem (Richard M. Karp, 1972)

Hamiltonov problem

Hamiltonov problem

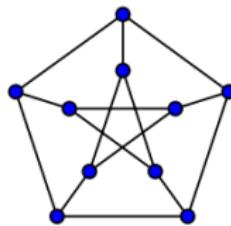
Za vrsto grafov s posebnimi lastnostmi (recimo z visoko simetrijo) se da dokazati, da so hamiltonski.

Hamiltonov problem

Za vrsto grafov s posebnimi lastnostmi (recimo z visoko simetrijo) se da dokazati, da so hamiltonski.



Julius Petersen, 1839-1910



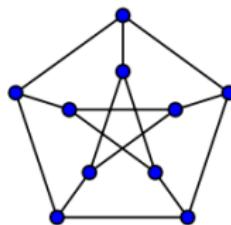
Obstaja le hamiltonska pot

Hamiltonov problem

Za vrsto grafov s posebnimi lastnostmi (recimo z visoko simetrijo) se da dokazati, da so hamiltonski.



Julius Petersen, 1839-1910



Obstaja le hamiltonska pot



Laszlo Lovasz, 1948-

Ali ima vsak povezan tranzitiven graf hamiltonsko pot?, 1968

Hamiltonov problem

Hamiltonov problem

Vrsta optimizacijskih problemov
(v matematiki, fiziki, kemiji, biologiji, računalništvu, logistiki)
→ Hamiltonov problem (morda z dodatnimi omejitvami)

Hamiltonov problem

Vrsta optimizacijskih problemov
(v matematiki, fiziki, kemiji, biologiji, računalništvu, logistiki)
→ Hamiltonov problem (morda z dodatnimi omejitvami)

Problem trgovskega potnika

**Dan (polni) graf z vrednostmi ("cenami") na povezavah.
Konstruiraj "najcenejši" hamiltonski cikel! (1930)**

Hamiltonov problem

Vrsta optimizacijskih problemov
(v matematiki, fiziki, kemiji, biologiji, računalništву, logistiki)
→ Hamiltonov problem (morda z dodatnimi omejitvami)

Problem trgovskega potnika

**Dan (polni) graf z vrednostmi ("cenami") na povezavah.
Konstruiraj "najcenejši" hamiltonski cikel! (1930)**



Karl Menger, 1902-1985

Hamiltonov problem

Vrsta optimizacijskih problemov
(v matematiki, fiziki, kemiji, biologiji, računalništву, logistiki)
→ Hamiltonov problem (morda z dodatnimi omejitvami)

Problem trgovskega potnika

**Dan (polni) graf z vrednostmi ("cenami") na povezavah.
Konstruiraj "najcenejši" hamiltonski cikel! (1930)**



Karl Menger, 1902-1985

Izjemen napredek 50' in 60' letih. Problem aktualen še danes.

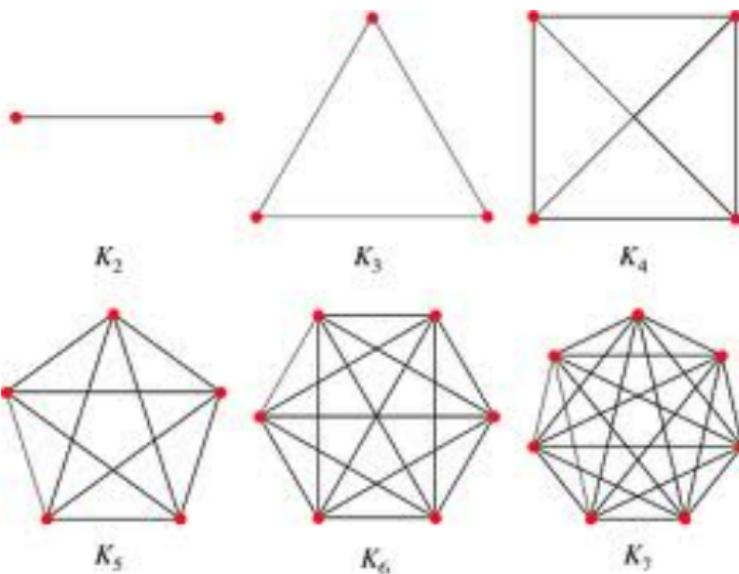
III. Planarnost

III. Planarnost

Graf je planaren = \exists realizacija v ravnini brez "napačnih" presečišč.

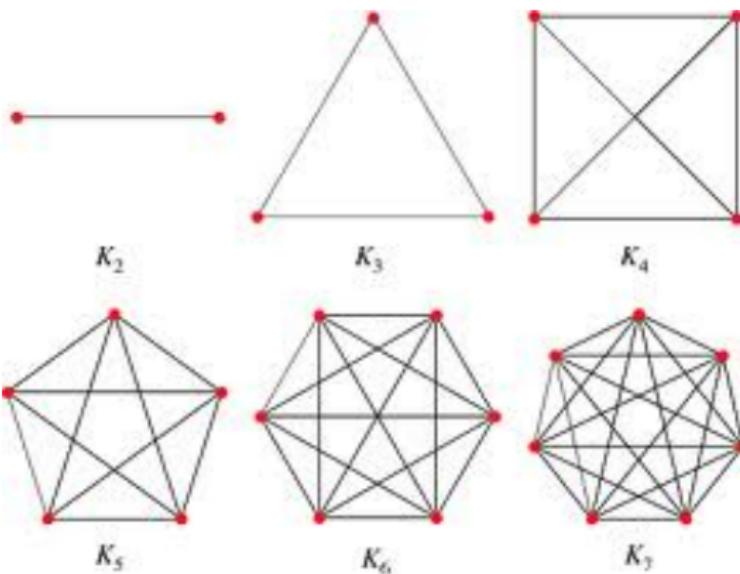
III. Planarnost

Graf je planaren = \exists realizacija v ravnini brez "napačnih" presečišč.



III. Planarnost

Graf je planaren = \exists realizacija v ravnini brez "napačnih" presečišč.



Vrsta optimizacijskih problemov → problem planarnosti

Planarnost

Izrek (Euler, 1752) Za povezan planaren graf velja $|V| - |E| + |F| = 2$.

Izrek (Euler, 1752) Za povezan planaren graf velja $|V| - |E| + |F| = 2$.

Prvi popoln dokaz sta podala Legandre (1794) in Cauchy (1811)



Adrien-Marie Legendre, 1752-1833

Augustin-Marie Cauchy, 1789-1857

Izrek (Euler, 1752) Za povezan planaren graf velja $|V| - |E| + |F| = 2$.

Prvi popoln dokaz sta podala Legandre (1794) in Cauchy (1811)



Adrien-Marie Legendre, 1752-1833

Augustin-Marie Cauchy, 1789-1857

Z uporabo Eulerjeve formule in naslednjih enakosti

$$\begin{aligned}|F_1| + |F_2| + |F_3| + \dots + |F_r| &= |F| \\ |F_1| + 2|F_2| + 3|F_3| + \dots + r|F_r| &= 2|E|\end{aligned}$$

se v precej primerih da enostavno dokazati, da dani graf ni planaren.

Na primer, K_5 in $K_{3,3}$

Planarnost



Kazimierz Kuratowski, 1896-1980

Izrek (1930) Povezan graf je planaren \Leftrightarrow ne "vsebuje" K_5 ali $K_{3,3}$.



Kazimierz Kuratowski, 1896-1980

Izrek (1930) Povezan graf je planaren \Leftrightarrow ne "vsebuje" K_5 ali $K_{3,3}$.



Robert E. Tarjan, 1948-

Razvil učinkovit algoritem za testiranje planarnosti, 1973.



Kazimierz Kuratowski, 1896-1980

Izrek (1930) Povezan graf je planaren \Leftrightarrow ne "vsebuje" K_5 ali $K_{3,3}$.



Robert E. Tarjan, 1948-

Razvil učinkovit algoritem za testiranje planarnosti, 1973.

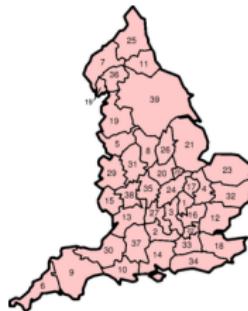
Neil Robertson (1938-) in Paul Seymour (1950-)
Posplošila izrek Kuratowskega na poljubne ploskve, 1990.

IV. Problem štirih bary

IV. Problem štirih barv



Francis Guthrie, 1831-1899

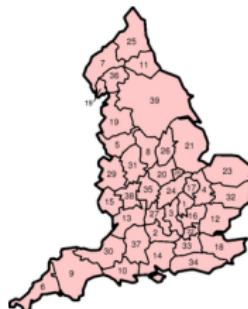


Zemljevid angleških grofij, 1852

IV. Problem štirih barv



Francis Guthrie, 1831-1899



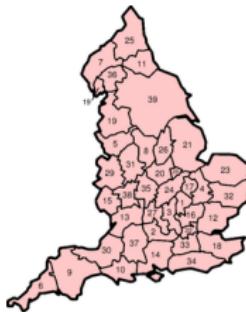
Zemljevid angleških grofij, 1852

Ali je vsak zemljevid mogoče pravilno pobarvati s 4 barvami?

IV. Problem štirih barv



Francis Guthrie, 1831-1899



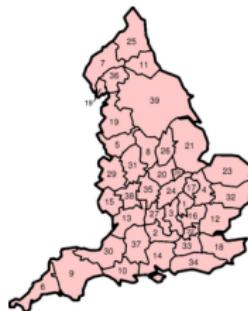
Zemljevid angleških grofij, 1852

**Ali je vsak zemljevid mogoče pravilno pobarvati s 4 barvami?
Ali je vsak ravninski graf mogoče pravilno obarvati s 4 barvami?**

IV. Problem štirih barv



Francis Guthrie, 1831-1899



Zemljevid angleških grofij, 1852

**Ali je vsak zemljevid mogoče pravilno pobarvati s 4 barvami?
Ali je vsak ravninski graf mogoče pravilno obarvati s 4 barvami?**



Augustus De Morgan, 1806-1871

1879 →



Arthur Cayley, 1821-1895

Problem štirih bary

Problem štirih barv



Alfred Kempe, 1849-1922, Objavil "rešitev" (1879)

Problem štirih barv



Alfred Kempe, 1849-1922, Objavil "rešitev" (1879)



Percy J. Heawood, 1861-1955

Našel napako v Kempejevem dokazu (1890).

Problem štirih barv



Alfred Kempe, 1849-1922, Objavil "rešitev" (1879)



Percy J. Heawood, 1861-1955

Našel napako v Kempejevem dokazu (1890).
Dokazal **Izrek 5 barv**.

Problem štirih barv



Alfred Kempe, 1849-1922, Objavil "rešitev" (1879)



Percy J. Heawood, 1861-1955

Našel napako v Kempejevem dokazu (1890).

Dokazal **Izrek 5 barv.**

Domnevo posplošil na zemljevide, ki niso ravninski

20. stoletje:

Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije → bravanje grafov

20. stoletje:

Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije → bravanje grafov
Problem 4 barv postane splošno poznan

20. stoletje:

Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije → bravanje grafov
Problem 4 barv postane splošno poznan

Kenneth Appel (1932-), Wolfgang Haken (1928-) (1976)

Izrek 4 barv Vsak planaren graf se da pravilno obarvati s 4-barvami.

20. stoletje:

Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije → bravanje grafov
Problem 4 barv postane splošno poznan

Kenneth Appel (1932-), Wolfgang Haken (1928-) (1976)

Izrek 4 barv Vsak planaren graf se da pravilno obarvati s 4-barvami.

Metoda:

Sofisticiran sistem redukcij na manjše grafe (nekaj sto strani)
1,936 osnovnih konfiguracij preverila z računalnikom (nekaj tisoč ur)

20. stoletje:

Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije → bravanje grafov
Problem 4 barv postane splošno poznan

Kenneth Appel (1932-), Wolfgang Haken (1928-) (1976)

Izrek 4 barv Vsak planaren graf se da pravilno obarvati s 4-barvami.

Metoda:

Sofisticiran sistem redukcij na manjše grafe (nekaj sto strani)
1,936 osnovnih konfiguracij preverila z računalnikom (nekaj tisoč ur)

Kontroverzna rešitev

Prvi matematični dokaz z ekstenzivno uporabo računalnika

20. stoletje:

Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije → bravanje grafov
Problem 4 barv postane splošno poznan

Kenneth Appel (1932-), Wolfgang Haken (1928-) (1976)

Izrek 4 barv Vsak planaren graf se da pravilno obarvati s 4-barvami.

Metoda:

Sofisticiran sistem redukcij na manjše grafe (nekaj sto strani)
1,936 osnovnih konfiguracij preverila z računalnikom (nekaj tisoč ur)

Kontroverzna rešitev

Prvi matematični dokaz z ekstenzivno uporabo računalnika

Kaj je matematični dokaz?

20. stoletje:

Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije → bravanje grafov
Problem 4 barv postane splošno poznan

Kenneth Appel (1932-), Wolfgang Haken (1928-) (1976)

Izrek 4 barv Vsak planaren graf se da pravilno obarvati s 4-barvami.

Metoda:

Sofisticiran sistem redukcij na manjše grafe (nekaj sto strani)
1,936 osnovnih konfiguracij preverila z računalnikom (nekaj tisoč ur)

Kontroverzna rešitev

Prvi matematični dokaz z ekstenzivno uporabo računalnika

Kaj je matematični dokaz?

Gerhard Ringel (1920-2008), J. W. T. Youngs (1910-1970)

Dokazala Heawoodovo domnevo

o barvanju zamljevidov na poljubnih ploskvah (1968).

20. stoletje:

Vrsta problemov iz kombinatorične optimizacije → bravanje grafov
Problem 4 barv postane splošno poznan

Kenneth Appel (1932-), Wolfgang Haken (1928-) (1976)

Izrek 4 barv Vsak planaren graf se da pravilno obarvati s 4-barvami.

Metoda:

Sofisticiran sistem redukcij na manjše grafe (nekaj sto strani)
1,936 osnovnih konfiguracij preverila z računalnikom (nekaj tisoč ur)

Kontroverzna rešitev

Prvi matematični dokaz z ekstenzivno uporabo računalnika
Kaj je matematični dokaz?

Gerhard Ringel (1920-2008), J. W. T. Youngs (1910-1970)

Dokazala Heawoodovo domnevo

o barvanju zamljevidov na poljubnih ploskvah (1968).

Izrek 4 barv je zgolj poseben primer tega splošnega izreka.
Radikalno drugačne tehnike dokazovanja.

V. Analiza omrežij in študij pretokov

V. Analiza omrežij in študij pretokov



Gustav Kirchhoff, 1824-1887

Analiza tokov v električnih omrežjih, 1847

V. Analiza omrežij in študij pretokov



Gustav Kirchhoff, 1824-1887

Analiza tokov v električnih omrežjih, 1847

→ **zametek teorije homologije**



ki jo je konec 19. stol. utemeljil Henri Poincaré (1845-1912)

V. Analiza omrežij in študij pretokov



Gustav Kirchhoff, 1824-1887

Analiza tokov v električnih omrežjih, 1847

→ **zametek teorije homologije**



ki jo je konec 19. stol. utemeljil Henri Poincaré (1845-1912)

20. stoletje: študij pretokov v grafih

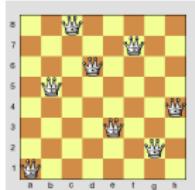
Optimizacijski problemi v logistiki in transportni teoriji

Karl Menger, Lester R. Ford (1927-) in Delbert R. Fulkerson (1924-1976)

VI. Problem 8 dam

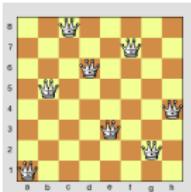
VI. Problem 8 dam

8 kraljic, ki se medsebojno ne napadajo, berlinski časnik, 1848



VI. Problem 8 dam

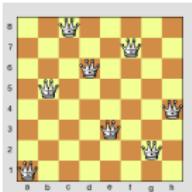
8 kraljic, ki se medsebojno ne napadajo, berlinski časnik, 1848



12 osnovnih rešitev. Z rotacijami in zrcaljenji → 92 rešitev

VI. Problem 8 dam

8 kraljic, ki se medsebojno ne napadajo, berlinski časnik, 1848



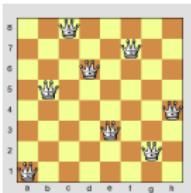
12 osnovnih rešitev. Z rotacijami in zrcaljenji → 92 rešitev



Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

VI. Problem 8 dam

8 kraljic, ki se medsebojno ne napadajo, berlinski časnik, 1848



12 osnovnih rešitev. Z rotacijami in zrcaljenji → 92 rešitev

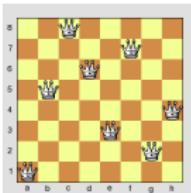


Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

V jeziku grafov → **število maksimalnih diskretnih podmnožic**.

VI. Problem 8 dam

8 kraljic, ki se medsebojno ne napadajo, berlinski časnik, 1848



12 osnovnih rešitev. Z rotacijami in zrcaljenji → 92 rešitev



Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

V jeziku grafov → **število maksimalnih diskretnih podmnožic**.

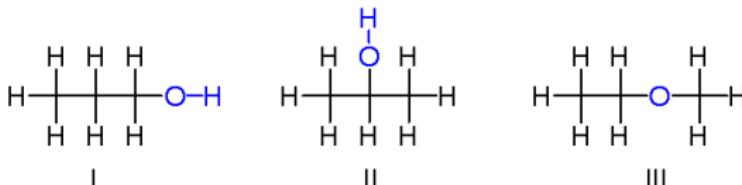
v 2. polovici 20. stoletja:

Teorija informacij, Teorija kodiranja, Metode umetne inteligence

VII. Preštevanje

VII. Preštevanje

Izomeri: ista molekulska formula, različne strukturne formule
na primer, C_3H_8O



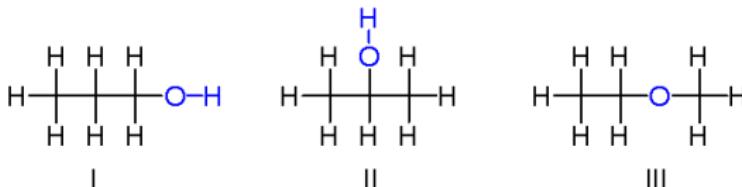
propanol, propil-alkohol, izpropil-alkohol

Koliko različnih spojin z dano molekulsko formulo obstaja?

Arthur Cayley, 1857

VII. Preštevanje

Izomeri: ista molekulska formula, različne strukturne formule
na primer, C_3H_8O



propanol, propil-alkohol, izpropil-alkohol

Koliko različnih spojin z dano molekulsko formulo obstaja?

Arthur Cayley, 1857



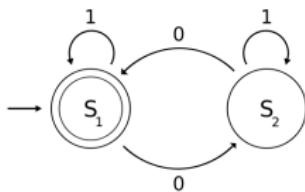
George Pólya, 1887-1985

Razvil teorijo preštevanja (npr. grafov z danimi lastnostmi)

VIII. Teorija avtomatov

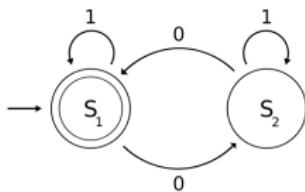
Končni deterministični avtomat

Posebne vrste usmerjeni graf z vrednostmi na povezavah



Končni deterministični avtomat

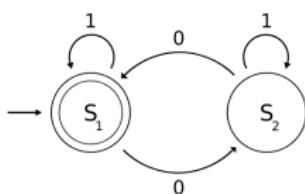
Posebne vrste usmerjeni graf z vrednostmi na povezavah



Razvoj računalništva → Intenziven razvoj Teorije avtomatov

Končni deterministični avtomat

Posebne vrste usmerjeni graf z vrednostmi na povezavah



Razvoj računalništva → Intenziven razvoj Teorije avtomatov

Pomembni v teoriji (logika, teorija izračunljivosti)
V vsakodnevnom življenu jih srečamo na vsakem koraku.

IX. Algoritmični problemi na grafih

Načrtovanje in analiza podatkovnih struktur

Načrtovanje in analiza podatkovnih struktur

Časovna in prostorska zahtevnost

Načrtovanje in analiza podatkovnih struktur

Časovna in prostorska zahtevnost

Izjemnega pomena: algoritmi na grafih

X. Študij simetrije

X. Študij simetrije

Simetrijske lastnosti grafov pomembne v teoriji in praksi
v kemiji: → kemijske in fizikalne lastnosti molekul

X. Študij simetrije

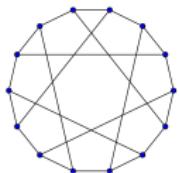
Simetrijske lastnosti grafov pomembne v teoriji in praksi
v kemiji: → kemijske in fizikalne lastnosti molekul

Avtomorfizem = Povratno-enolična transformacija, ki graf ohranja

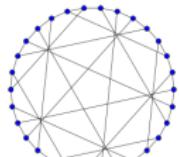
X. Študij simetrije

Simetrijske lastnosti grafov pomembne v teoriji in praksi
v kemiji: → kemijske in fizikalne lastnosti molekul

Avtomorfizem = Povratno-enolična transformacija, ki graf ohranja



Heawoodov graf

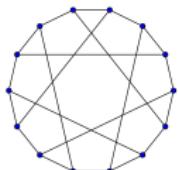


Tutteva 8-kletka

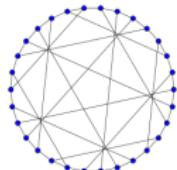
X. Študij simetrije

Simetrijske lastnosti grafov pomembne v teoriji in praksi
v kemiji: → kemijske in fizikalne lastnosti molekul

Avtomorfizem = Povratno-enolična transformacija, ki graf ohranja



Heawoodov graf



Tutteva 8-kletka

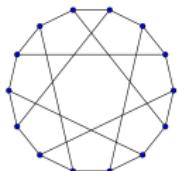


William T. Tutte, 1917-2002
Razvil teorijo o simetričnih grafih valence 3. (1946)

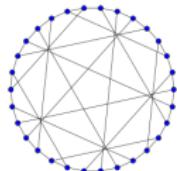
X. Študij simetrije

Simetrijske lastnosti grafov pomembne v teoriji in praksi
v kemiji: → kemijske in fizikalne lastnosti molekul

Avtomorfizem = Povratno-enolična transformacija, ki graf ohranja



Heawoodov graf



Tutteva 8-kletka



William T. Tutte, 1917-2002

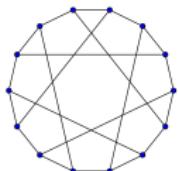
Razvil teorijo o simetričnih grafih valence 3. (1946)

Algebraična teorija grafov se razvije v 70' letih 20. stoletja

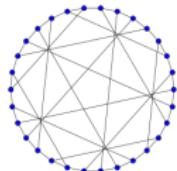
X. Študij simetrije

Simetrijske lastnosti grafov pomembne v teoriji in praksi
v kemiji: → kemijske in fizikalne lastnosti molekul

Avtomorfizem = Povratno-enolična transformacija, ki graf ohranja



Heawoodov graf



Tutteva 8-kletka



William T. Tutte, 1917-2002

Razvil teorijo o simetričnih grafih valence 3. (1946)

Algebraična teorija grafov se razvije v 70' letih 20. stoletja
Pomemben doprinos slovenske šole.

Hvala!