Verižnica

Izleti v matematično vesolje

Marko Razpet

Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani

Koper, 22. oktober 2010

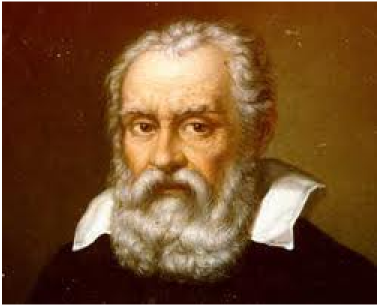
Kaj je verižnica?

Tanka, gibka, neraztegljiva in homogena nit ali veriga, ki jo obesimo v dveh točkah tako, da prosto visi, zaradi težnosti po umiritvi zavzame obliko krivulje, ki ji pravimo *verižnica*.

Verižnica na vsakem koraku

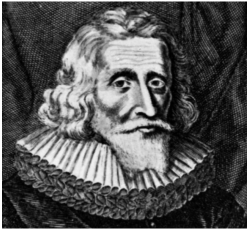
Galilei

Znanstveniki so se že od nekdaj zanimali, kako bi to znamenito krivuljo opisali tudi matematično. Galileo Galilei (1564–1642) je trdil, da je verižnica kar parabola.



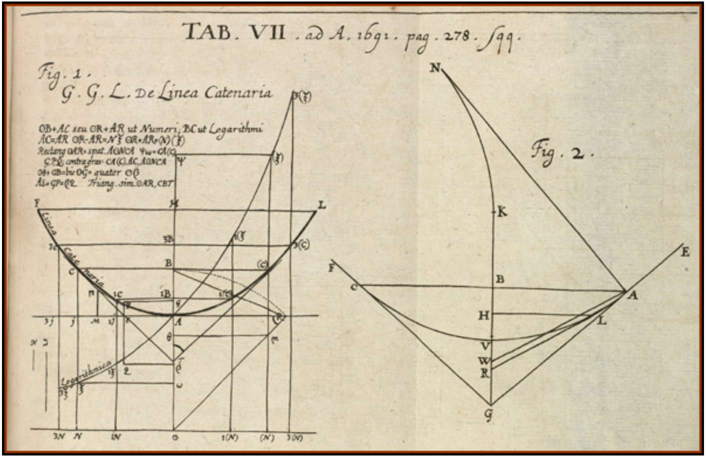
Okrog leta 1646 je Christiaan Huygens (1629–1695) v nekem pismu Marinu Mersennu (1588–1648) zaupal, da verižnica ni parabola. Do tega sklepa je prišel tudi Joachim Jungius (1587–1657) in to tudi potrdil z eksperimentom.





Ko je bil na voljo infinitezimalni račun, so se s problemom oblike verižnice na pobudo Jakoba Bernoullija (1654–1705) spopadli Johann Bernoulli (1667–1748), David Gregory (1659–1708) in Gottfried W. Leibniz (1646–1716). Prišli so do ugotovitve, da je verižnica del grafa funkcije $x \mapsto a\,\mathrm{ch}(x/a)$.

Leibniz



Hooke

Robert Hooke (1635–1703) je raziskoval trdnostne lastnosti obokov, ki imajo v preseku obliko narobe obrnjene verižnice. V gradbeništvu so take oboke izdelovali že veliko prej.

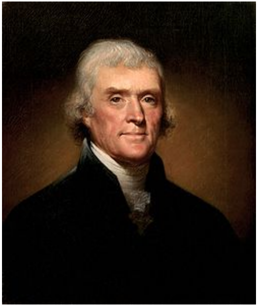
Robert Hooke – upodobitev Rite Greer, 2004.

O imenu

V SSKJ najdemo dva pomena:
veržnica[1] -e ž (i) *ženska oblika od verižnik, prekupčevalec*: verižnica z jajci
verižnica[2] -e ž (i) teh. *kolo z žlebom na obodu, po katerem teče veriga*: natakniti verigo na verižnico
◊ *mat. krivulja, ki ima obliko prosto viseče, v dveh točkah pritrjene vrvice; navt. ladijsko skladišče verig*

Jefferson

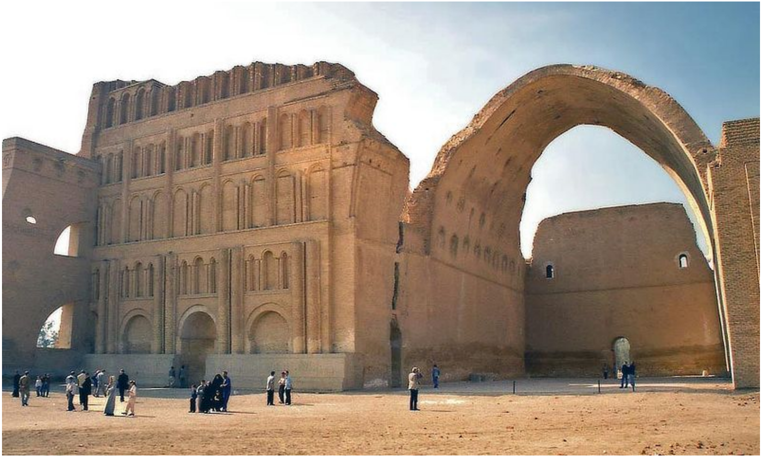
Baje je angleško besedo za verižnico, *catenary*, predlagal Thomas Jefferson (1743–1826), tretji predsednik ZDA. Beseda temelji na latinski *catena*, kar pomeni *veriga*. Raziskovali so tudi nehomogene, raztegljive, vrteče se in druge verižnice.



Veržnica v nekaterih drugih jezikih

Angleško: **catenary**;
nemško: **Kettenlinie**;
nizozemsko: **kettinglijn**;
švedsko: **kedjekurva**;
francosko: **chaînette**;
italijansko, špansko: **catenaria**;
katalonsko: **catenària**;
portugalsko: **catenária**;
madžarsko: **láncgörbe**;
češko: **řetězovka**;
poljsko: **krzywa łańcuchowa**;
hrvaško: **lančanica**;
rusko: **цепная линия**;
ukrajinsko: **ланцюгова лінія**.

Verižnica v arhitekturi. Taq-i Kisra, Irak.



Verižnica v arhitekturi. Barcelona, Casa Milà, arh. Antoni Gaudì.

Verižnica v arhitekturi. Sheffield, Winter Garden, arh. Pringle Richards Sharratt Architects.

Verižnica v arhitekturi. St. Louis, Missouri, Gateway Arch, arh. Eero Saarinen.

Neodvisno drug od drugega sta jih vpeljala leta 1760 Johann Heinrich Lambert (1728–1777) in Vincenzo Riccati (1707–1775).

Hiperbolične funkcije – osnovne formule

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

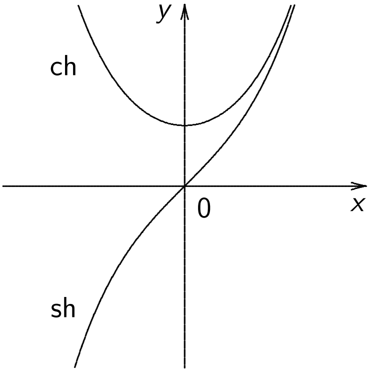
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

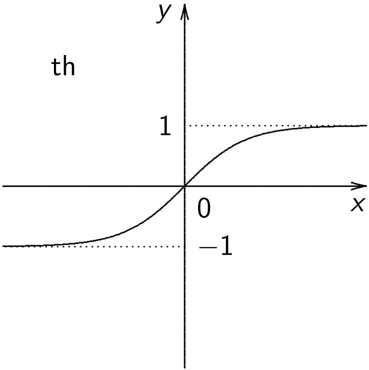
$$\operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$$

Grafi hiperboličnih funkcij





Hiperbolične funkcije – adicijska izreka in posledice

Vrednosti: $\operatorname{ch} 0 = 1, \operatorname{sh} 0 = 0, \operatorname{th} 0 = 0$. Limite:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{ch} x = \infty, \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{sh} x = \pm\infty, \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{th} x = \pm 1$$

Adicijska izreka:

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

Posledici:

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$$

Inverzne hiperbolične funkcije ali area funkcije – osnovne formule

Za vse $x \geq 1$ velja:

$$y = \operatorname{ar\,ch} x \iff x = \operatorname{ch} y \iff y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Za vse realne x velja:

$$y = \operatorname{ar\,sh} x \iff x = \operatorname{sh} y \iff y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

Za vse $|x| < 1$ velja:

$$y = \operatorname{ar\,th} x \iff x = \operatorname{th} y \iff y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

Inverzne hiperbolične funkcije ali area funkcije – odvodi

$$(\operatorname{ar}\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \text{ za } x \geq 1, \quad (\operatorname{ar}\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$(\operatorname{ar}\operatorname{th} x)' = \frac{1}{1 - x^2} \text{ za } |x| < 1$$

Dolžina loka krivulje

Če je funkcija $x \mapsto f(x)$ zvezno odvedljiva na intervalu $[\alpha, \beta]$, je dolžina krivulje $y = f(x)$ $(\alpha \leq x \leq \beta)$:

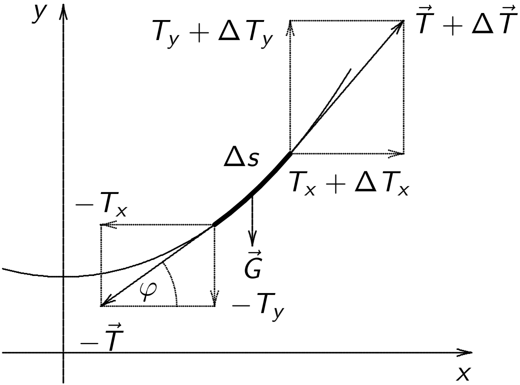
$$s_{[\alpha,\beta]} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

V posebnem primeru imamo za verižnico $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$:

$$s_{[\alpha,\beta]} = a[\mathrm{sh}(\beta/a) - \mathrm{sh}(\alpha/a)] \quad (\alpha \leq x \leq \beta),$$

$$s_{[0,\alpha]} = a\,\mathrm{sh}(\alpha/a) \quad (\alpha \geq 0).$$

Do enačbe verižnice – po fizikalno



$$\vec{T} = (T_x, T_y), \quad T = |\vec{T}|$$

$$\sigma_0 = \frac{dm}{ds}$$

$$\vec{G} = (0, -\sigma_0 g \Delta s)$$

$$-\vec{T} + (\vec{T} + \Delta\vec{T}) + \vec{G} = \vec{0}$$

$$\Delta\vec{T} + \vec{G} = \vec{0}$$

$$\Delta T_x = 0$$

$$\Delta T_y = \sigma_0 g \Delta s$$

$$T_x = T_0 = konst.$$

$$\frac{dT_y}{ds} = \sigma_0 g$$

Do enačbe verižnice - nadaljevanje

$$T_x = T\cos\varphi = T_0$$

$$T_y = T\sin\varphi = \frac{T_0}{\cos\varphi}\cdot\sin\varphi = T_0\operatorname{tg}\varphi = T_0 y'$$

$$\frac{dT_y}{ds} = \frac{d}{ds}(T_0 y') = T_0\frac{dy'}{ds} = T_0\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = \sigma_0 g$$

$$T_0 y'' = \sigma_0 g\frac{ds}{dx} = \sigma_0 g\sqrt{1+y'^2}$$

$$a = \frac{T_0}{\sigma_0 g} > 0$$

Diferencialna enačba verižnice:

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$$

Reševanje enačbe verižnice

Enačbi

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + y'^2} \qquad (\mathrm{DE} - 1)$$

znižamo red z vpeljavo $p = y'$:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + p^2}$$

Ločimo spremenljivki:

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{a}$$

Integriramo:

$$\operatorname{ar\,sh} p = \frac{x - x_0}{a}$$

Pri tem je x_0 prva integracijska konstanta.

Reševanje enačbe verižnice – nadaljevanje

Izrazimo:

$$p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} \frac{x - x_0}{a}$$

Z drugo integracijo dobimo iskano rešitev:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{a} + y_0$$

Pri tem je y_0 druga integracijska konstanta.

Splošna oblika enačbe verižnice je:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{a} + y_0$$

Verižnica izbrane dolžine skozi dani točki

Verižnica

$$y = f(x) = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x - x_0}{a} + y_0$$

naj ima dolžino ℓ in naj poteka skozi točki $M(\alpha, A)$ in $N(\beta, B)$. Pri tem je $\alpha < \beta$. Veljati morajo enačbe:

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = a(\mathrm{sh}\,\frac{\beta - x_0}{a} - \mathrm{sh}\,\frac{\alpha - x_0}{a}) = \ell \qquad (1)$$

$$a\,\mathrm{ch}\,\frac{\alpha - x_0}{a} + y_0 = A \qquad (2)$$

$$a\,\mathrm{ch}\,\frac{\beta - x_0}{a} + y_0 = B \qquad (3)$$

Neznanke so a, x_0 in y_0. Naloga je enolično rešljiva pri pogoju $|MN| < \ell$ oziroma

$$(\beta - \alpha)^2 + (B - A)^2 < \ell^2 \qquad \text{(P)}$$

.

Naj bo pogoj (P) izpolnjen. Iz enačbe (1) dobimo z uporabo posledic adicijskih izrekov za funkciji ch in sh:

$$\ell = 2a \,\mathrm{ch}\, \frac{\alpha + \beta - 2x_0}{2a} \,\mathrm{sh}\, \frac{\beta - \alpha}{2a} \tag{4}$$

Iz enačb (2) in (3) pa:

$$B - A = 2a \,\mathrm{sh}\, \frac{\alpha + \beta - 2x_0}{2a} \,\mathrm{sh}\, \frac{\beta - \alpha}{2a} \tag{5}$$

Delimo in dobimo:

$$\frac{B - A}{\ell} = \mathrm{th}\, \frac{\alpha + \beta - 2x_0}{2a} \tag{6}$$

Reševanje problema – nadaljevanje

Izrazimo funkcijo sh s funkcijo th in iz (6) dobimo:

$$\operatorname{sh}\frac{\alpha+\beta-2x_0}{2a} = \frac{\operatorname{th}\frac{\alpha+\beta-2x_0}{2a}}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\frac{\alpha+\beta-2x_0}{2a}}} = \frac{(B-A)/\ell}{\sqrt{1-((B-A)/\ell)^2}}$$

Vstavimo dobljeni rezultat v (5):

$$B-A = 2a\frac{(B-A)/\ell}{\sqrt{1-((B-A)/\ell)^2}}\operatorname{sh}\frac{\beta-\alpha}{2a}$$

Če je $A \neq B$, krajšamo, preoblikujemo in imamo:

$$\operatorname{sh}\frac{\beta-\alpha}{2a} = \frac{\beta-\alpha}{2a}\cdot\frac{\ell}{\beta-\alpha}\sqrt{1-((B-A)/\ell)^2} \tag{7}$$

Reševanje simetričnega problema

Ko je $A = B$, dobimo za rešitev simetrično krivuljo. Tedaj iz (6) takoj najdemo

$$x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Iz (4) je potem

$$\operatorname{sh} \frac{\beta - \alpha}{2a} = \frac{\ell}{2a} = \frac{\beta - \alpha}{2a} \cdot \frac{\ell}{\beta - \alpha}$$

V (7) vpeljemo konstanto

$$\varrho = \frac{\ell}{\beta - \alpha}\sqrt{1 - ((B - A)/\ell)^2}$$

in novo neznanko

$$z = \frac{\beta - \alpha}{2a}$$

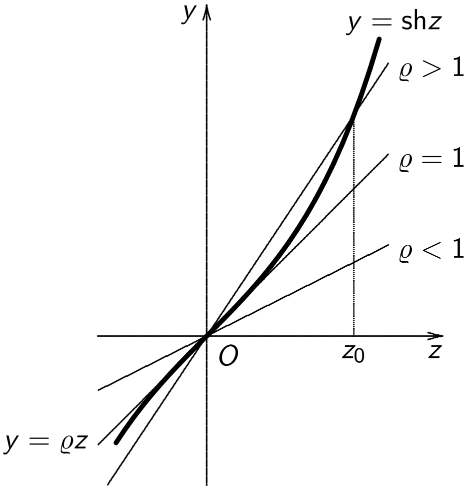
Poiskati je treba pozitivni koren z_0 transcendentne enačbe

$$\operatorname{sh} z = \varrho z \tag{8}$$

Enačba ima pozitivno rešitev le, če je $\varrho > 1$. To je pri pogoju (P) res. Opazimo, da pridemo do iste enačbe tudi, ko je $A = B$. Tedaj je

$$\varrho = \frac{\ell}{\beta - \alpha}$$

Enačba $\operatorname{sh} z = \varrho z$



Reševanje problema – izračun vseh neznank

Enačbo (7) rešimo numerično. Ko imamo znan z_0, dobimo še:

$$a = \frac{\beta - \alpha}{2z_0}$$

$$x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2} - a \operatorname{ar\,th} \frac{B - A}{\ell}$$

$$y_0 = A - a \operatorname{ch} \frac{\alpha - x_0}{a}$$

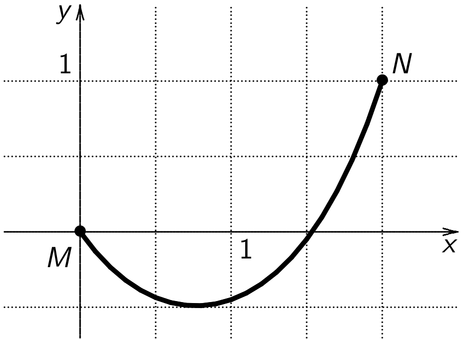
S tem je naloga v celoti rešena.

Za

$$M(0,0), N(2,1), \ell = 3$$

dobimo:

$$\varrho = 1.4142135, z_0 = 1.4914, a = 0.6705, x_0 = 0.7676, y_0 = -1.600$$

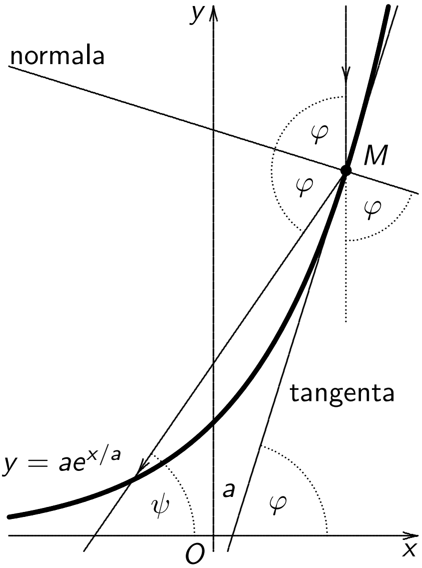


Verižnica kot kavstika

V koordinatnem sistemu Oxy naj padajo svetlobni žarki od zgoraj vzporedno z osjo y in naj se na eksponentni krivulji $y = ae^{x/a}$ odbijejo po odbojnem zakonu. Ogrinjača odbitih žarkov je verižnica

$$y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x+a}{a}\right)$$

Enačba odbitega žarka



Izberemo točko $M(t, ae^{t/a})$ na eksponentni krivulji. Iz trikotnika, ki ga omejujejo os x, odbiti žarek v točki M in tangenta v točki M, vidimo, da velja:

$$\varphi = \psi + (\pi/2 - \varphi), \ \psi = 2\varphi - \pi/2$$

Zato je smerni koeficient premice nosilke odbitega žarka:

$$\operatorname{tg} \psi = -\operatorname{ctg}(2\varphi) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(2\varphi)}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi - 1}{2 \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{sh}(t/a)$$

Ogrinjača odbitih žarkov

Premice nosilke odbitih žarkov za vse realne t sestavljajo enoparametrično družino:

$$y - ae^{t/a} = \operatorname{sh}(t/a)(x - t) \tag{D}$$

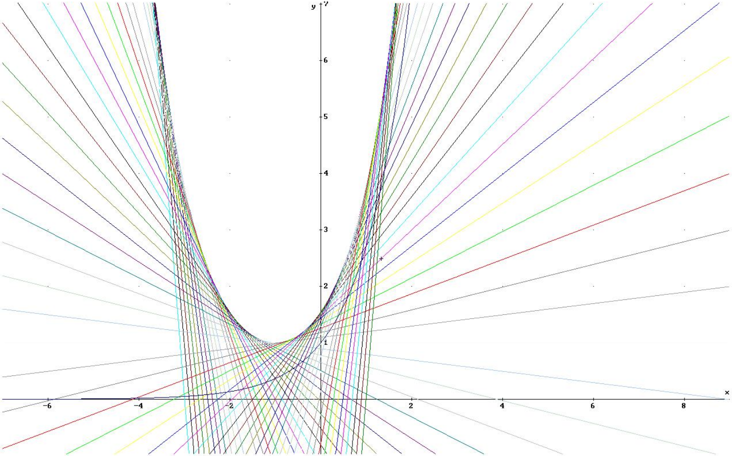
Z odvajanjem (D) na parameter t dobimo:

$$-e^{t/a} = \frac{1}{a}\operatorname{ch}(t/a)(x - t) - \operatorname{sh}(t/a) \tag{E}$$

Iz (E) najdemo s preurejanjem $t = x + a$, kar vstavimo v (D) in že smo pri enačbi verižnice s temenom v točki $(-a, a)$:

$$y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x + a}{a}\right)$$

Derive in verižnica

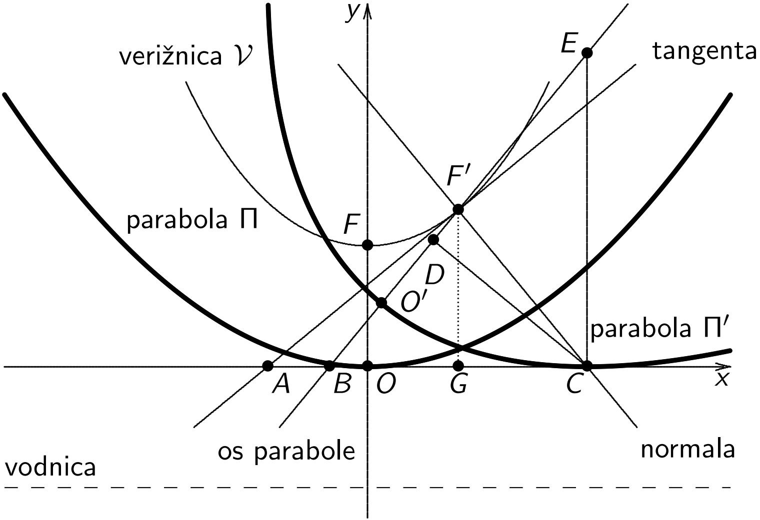


Verižnica kot sled gorišča kotaleče se parabole

V koordinatnem sistemu Oxy imejmo parabolo $4ay = x^2$, kjer je $a > 0$. Njeno gorišče je v točki $F(0, a)$, vodnica pa je premica $y = -a$. Če parabolo kotalimo brez drsenja po osi x, opiše njeno gorišče verižnico

$$y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$$

Kotaleča se parabola



Do sledi gorišča kotaleče se parabole

Parabola Π ima enačbo $4ay = x^2$, zato je njen parameter $p = 2a$. Njeno gorišče je v točki $F(0, a)$, teme v $O(0, 0)$. Po kotaljenju po osi x preide Π v Π', F v F', O v O'. Tedaj se Π' dotika osi x v točki C. To je trenutna os rotacije. Zato normala skozi točko F' na iskani krivulji $\mathcal{V}$, ki jo zariše F, poteka skozi C. Točka E je presečišče osi parabole Π' in normale na Π' v C. Točka D pa je pravokotna projekcija točke C na os parabole Π'. Zato je $|DE|$ subnormala za Π' v C. Vemo, da je pri paraboli vsaka subnormala dolga toliko kot njen parameter p. Torej je $|DE| = 2a$.

Do sledi gorišča kotaleče se parabole – nadaljevanje

Presečišče tangente na iskano krivuljo z osjo x naj bo A, presečišče osi parabole Π' z osjo x naj bo B, pravokotna projekcija gorišča F' na os x pa G.
Pri paraboli vsaka njena tangenta oklepa enaka kota s spojnico dotikališča z goriščem in z osjo. Torej je pri paraboli Π' trikotnik BCF' enakokrak. Smerni kot tangente na $\mathcal{V}$ naj bo $\varphi = \angle GAF'$. Zato je $\angle GF'C = \varphi$, $\varepsilon = \angle GCF' = \angle GBF' = \pi/2 - \varphi$ in $\angle CED = \pi/2 - \varepsilon = \varphi$.

Do diferencialne enačbe iskane krivulje

Iz pravokotnih trikotnikov DEC in $DF'C$ dobimo:

$$|DC| = |DE| \operatorname{tg}\varphi = 2a \operatorname{tg}\varphi, \quad \sin(\pi - 2\varepsilon) = \sin 2\varepsilon = \frac{|DC|}{|F'C|}$$

Torej je

$$|F'C| = \frac{|DC|}{\sin 2\varepsilon} = \frac{2a \operatorname{tg}\varphi}{\sin(\pi - 2\varphi)} = \frac{2a \sin\varphi}{2 \sin\varphi \cos^2\varphi} = \frac{a}{\cos^2\varphi}$$

Za iskano krivuljo $\mathcal{V}$ je potem

$$y = |GF'| = |CF'| \cos\varphi = \frac{a}{\cos\varphi} = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = a\sqrt{1 + y'^2}$$

S tem smo našli diferencialno enačbo krivulje $\mathcal{V}$. Začetni pogoj je $y(0) = a$.

Diferencialno enačbo

$$y = a\sqrt{1 + y'^2} \qquad (\mathrm{DE}-2)$$

pri začetnem pogoju $y(0) = a$ rešimo po ustaljenem postopku. Izrazimo za $x \geq 0$:

$$ay' = a\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - a^2}$$

Ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\frac{a\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = dx, \quad a\ln(y + \sqrt{y^2 - a^2}) = x + C$$

Za $x = 0$ je $y = a$, zato imamo najprej $C = a\ln a$ in nato

$$a\ln(y + \sqrt{y^2 - a^2}) - a\ln a = a\ln(y/a + \sqrt{(y/a)^2 - 1}) = x$$

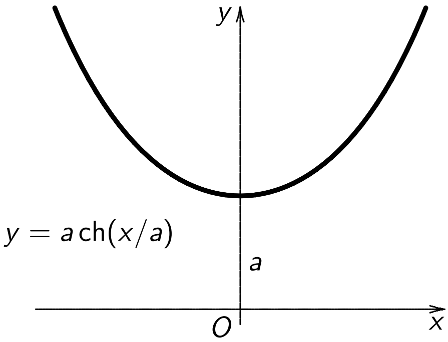
Pišemo

$$a\,\mathrm{ar\,ch}(y/a) = x, \quad y/a = \mathrm{ch}(x/a)$$

Nazadnje dobimo enačbo verižnice

$$y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$$

Zaradi simetrije je rezultat pravilen tudi za $x \leq 0$.



Verižnica s pritisnjeno parabolo in krožnico v temenu

Pritisnjena parabola verižnice $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$ v temenu:

$$y = a + \frac{x^2}{2a}$$

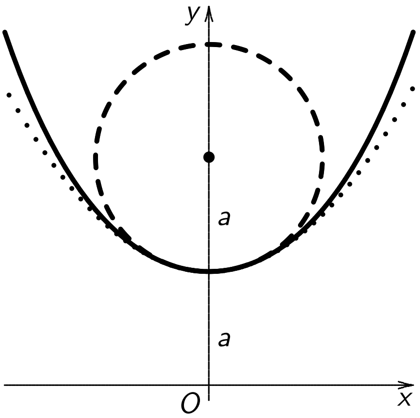
Polmer pritisnjene krožnice na verižnico v poljubni točki je odvisen le od ordinate:

$$R = \frac{y^2}{a}$$

V temenu:

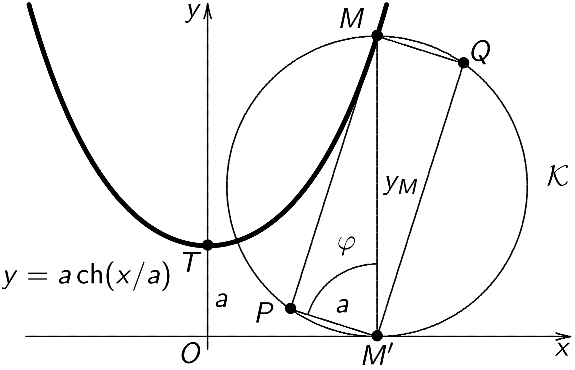
$$R_0 = a$$

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad y = a + \frac{x^2}{2a}, \quad x^2 + (y - 2a)^2 = a^2$$



Lastnost (L)

Projekcija ordinate v katerikoli točki M verižnice $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$ na normalo v M je konstantna, enaka a.



Zanimiva lastnost verižnice – dokaz

Naj bo $M(t, a\,\mathrm{ch}(t/a))$. Konstruiramo $y_M = |MM'| = a\,\mathrm{ch}(t/a)$ in krožnico $\mathcal{K}$ skozi M in M' premera y_M. Po znanem postopku včrtamo krožnici $\mathcal{K}$ verižnici pričrtan pravokotnik $PMQM'$, kjer je $|M'P| = a$. Kot $\varphi = \angle PM'M$ je tudi naklonski kot premice nosilke stranice PM. Pri tem je

$$\cos\varphi = \frac{a}{y_M} = \frac{a}{a\,\mathrm{ch}(t/a)} = \frac{1}{\mathrm{ch}(t/a)}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1} = \sqrt{\mathrm{ch}^2(t/a) - 1} = \mathrm{sh}(t/a)$$

Strmina tangente na verižnico v točki M pa je tudi $\mathrm{sh}(t/a)$, zato je stranica MP res na tangenti, stranica $|MQ| = a$ pa na normali verižnice skozi M. Torej je projekcija ordinate y_M na normalo verižnice konstantno enaka a.

Uporabna lastnost verižnice

Dolžina stranice PM pravokotnika $PMQM'$ je po Pitagorovem izreku:

$$|PM| = \sqrt{y_M^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2(t/a) - a^2} = a \operatorname{sh}(t/a) = s_{[0,t]}$$

Ugotovili smo: pri verižnici je dolžina loka med temenom T in poljubno točko M je enaka tangentni stranici pričrtanega pravokotnika.

Evolventa verižnice

Lastnost (L) verižnice omogoča konstrukcijo evolvente verižnice, to je krivulje, ki jo dobimo z odvijanjem niti z nje. To pomeni krivuljo, ki jo zariše točka $P(\xi,\eta)$, ko točko $M(x,y)$ vodimo po verižnici. Evolventa verižnice je *traktrisa*.

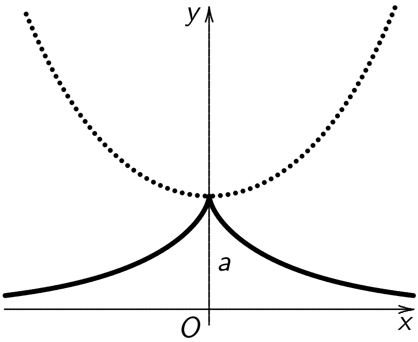
Za koordinati ξ,η točke P dobimo s prejšnje slike:

$$\xi = x - a\sin\varphi, \quad \eta = a\cos\varphi$$

Ker je $\mathrm{tg}\,\varphi = y' = \mathrm{sh}(x/a)$, hitro dobimo:

$$\xi = x - \mathrm{th}(x/a), \quad \eta = \frac{a}{\mathrm{ch}(x/a)}$$

Verižnica in traktrisa

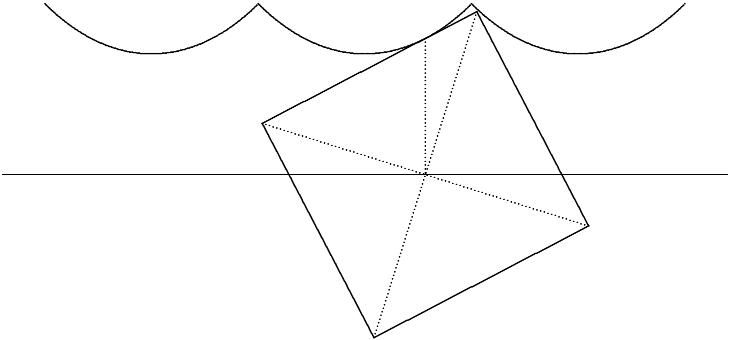


Lastnost (L) omogoča tako kotaljenje kvadrata stranice $2a$ po grbinah, pri katerem bo njegovo središče potovalo po premici. Za grbine vzamemo simetrične loke verižnice s parametrom a nad intervalom $(-x_0 \leq x \leq x_0)$, ki jih periodično nadaljujemo in prezrcalimo prek osi x. Za osnovni lok vzamemo

$$y = a\,\mathrm{ch}(x/a), x_0 = a\,\mathrm{ar\,sh}\,1, s_{[-x_0,x_0]} = 2a, y'(x_0) = 1$$

Grbine

Središče kotalečega se kvadrata potuje po premici.



Minimalna potencialna energija

Idealno homogeno verigo dolžine ℓ obesimo v točkah $M(\alpha, A)$ in $N(\beta, B)$. Pri tem je izpolnjen pogoj (P). Veriga se umiri tako, da je njena potencialna energija minimalna oziroma tako, da je njeno težišče najniže. Infinitezimalno majhna masa dm v točki $M(x, y)$ na iskani krivulji $y = y(x)$ ima potencialno energijo

$$gy\,dm = g\varrho y\,ds = g\varrho y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Pri tem je $\varrho = dm/ds$ krivuljska gostota mase verige. Za homogeno verigo je ϱ konstanta. Potencialna energija verige je:

$$W_p[y] = g\varrho\int_\alpha^\beta y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

pri pogoju

$$\mathcal{P}[y] = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+y'^2}\,dx = \ell$$

Rešiti je treba tipično variacijsko nalogo. Poiskati moramo zvezno odvedljivo funkcijo $x \mapsto y(x)$, za katero je integral

$$\mathcal{F}[y] = \int_\alpha^\beta y\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{G}$$

minimalen pri pogoju

$$\mathcal{P}[y] = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+y'^2}\,dx = \ell \tag{H}$$

Reševanje naloge nas pripelje do diferencialne enačbe

$$y - \lambda = a\sqrt{1+y'^2}$$

ki pa smo jo pravzaprav že srečali in jo znamo rešiti. V njej sta a in λ konstanti.

Reševanje diferencialne enačbe

Če diferencialno enačbo

$$y - \lambda = a\sqrt{1 + y'^2}$$

odvajamo, dobimo

$$y' = a\frac{y'y''}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Ker je očitno $y' \neq 0$, lahko krajšamo z y' in dobimo diferencialno enačbo (DE-1):

$$ay'' = \sqrt{1 + y'^2}$$

Konstanta a mora biti pozitivna, ker je verižnica konveksna, to pomeni $y'' > 0$, zaradi energijskih zahtev.
Naprej pa že znamo.

Minimalna rotacijska ploskev

Če krivuljo $y = y(x)$ dane dolžine ℓ na intervalu $[\alpha, \beta]$ zasukamo okoli osi x za 360°, dobimo rotacijsko ploskev. Problem, kdaj je površina te ploskve minimalna, nas spet vodi do iskanja minimuma integrala

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

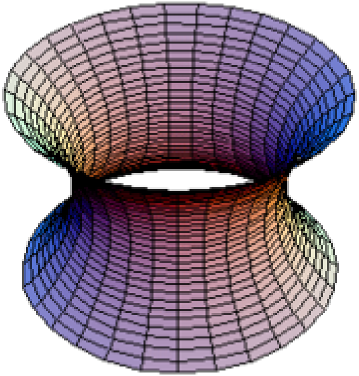
pri pogoju

$$\mathcal{P}[y] = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \ell$$

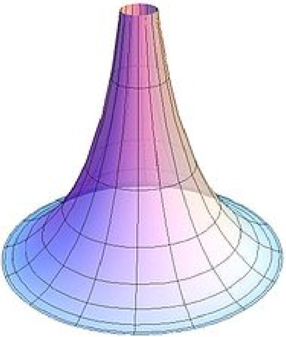
Rešitev poznamo: krivulja $y = y(x)$ je verižnica, rotacijsko ploskev pa imenujemo *katenoid*.

Katenoid – minimalna rotacijska ploskev

Katenoid je ploskev, ki nastane z rotacijo verižnice $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$ okoli osi x.



Psevdosfera je ploskev, ki nastane z rotacijo traktrise okoli njene asimptote.



Prava verižnica

Zamislimo si idealno homogeno verižnico v gravitacijskem polju

$$\vec{F}(\vec{r}) = -GM\frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad r = |\vec{r}| > 0,$$

kjer je G splošna gravitacijska konstanta in M masa Zemlje ali kakega drugega nebesnega objekta, nad katerim bi verižnico realizirali.
Enačbo verižnice bomo iskali v polarnih koordinatah: $r = r(\varphi)$.
Njena celotna potencialna energija je

$$W_p[r] = -GM\varrho\int_\alpha^\beta \frac{1}{r}\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi \qquad \text{(I)}$$

pri pogoju

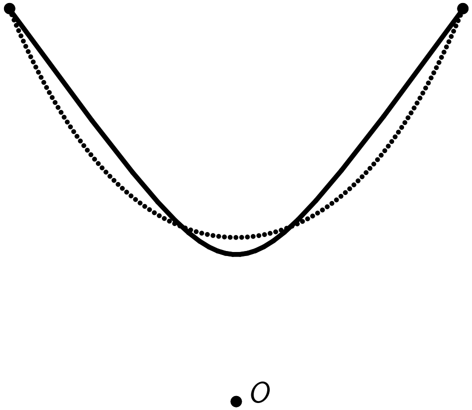
$$\mathcal{P}[r] = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi = 2\ell \qquad \text{(J)}$$

Pri tem smo uporabili izraz za diferencial loka krivulje $r = r(\varphi)$ v polarnih koordinatah in označili $r' = dr/d\varphi$ ter upoštevali, da ima infinitezimalno majhna masa dm na razdalji r od točke O potencialno energijo $-GM\,dm/r$. Iščemo tako pozitivno in odvedljivo funkcijo $\varphi \mapsto r(\varphi)$, definirano na intervalu $[\alpha, \beta]$, ki minimizira integral (I) pri pogoju (J) in z dodatkoma $r(\alpha) = r_1$ $r(\beta) = r_2$. Graf rešitve, ekstremalo v polarnih koordinatah, imenujemo *prava verižnica*.
Problem rešujemo z variacijskim računom.

Raziskovalca prave verižnice

Pravo verižnico sta predstavila Jochen Denzler in Andreas M. Hinz v članku *Catenaria Vera – The True Catenary* v reviji Expositiones Mathematicae leta 1999.

Primerjava med klasično in pravo verižnico enake dolžine



Hvala za vašo pozornost!

Tricycle.flv Grbine